



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.

Math 387.01



SCIENCE CENTER LIBRARY

BOUGHT WITH THE INCOME

FROM THE BEQUEST OF

PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,

AND HIS WIDOW,

ELIZA FARRAR,

FOR

"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
ASTRONOMY, AND NATURAL PHILOSOPHY."

18 May, 1901.

**MATHEMATISCHE
UNTERHALTUNGEN UND SPIELE.**

MATHEMATISCHE
UNTERHALTUNGEN UND SPIELE.

VON

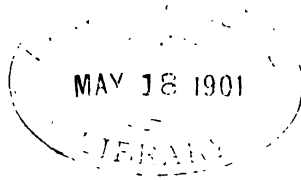
W. Ahrens
DR. W. AHRENS
IN MAGDEBURG.

MIT 1 TAFEL UND VIELEN FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1901.

Matt 3:67, 01



Pavlov fund

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

87

Vorwort.

Das Gebiet der von Bachet sogenannten „problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres“ hat seit Decennien sicherlich keinen hingebungsvolleren und erfolgreicheren Vertreter als Edouard Lucas gefunden; hiervon legen beredtes Zeugnis ab nicht nur zahlreiche in diversen Zeitschriften zerstreute Artikel, nicht nur viele Partieen seiner „Théorie des nombres“, sondern auch seine „Arithmétique amusante“ (Paris 1895), insbesondere aber seine „Récréations mathématiques“ (t. I—IV). Immerhin ist dieses letztere Werk, das als eine Gesamtdarstellung des betreffenden Gebietes geplant war, infolge des plötzlichen Hinscheidens seines Verfassers bekanntlich unvollendet geblieben; schon die beiden letzten der 4 Bände sind posthum, und wichtige, für die weiteren Bände in Aussicht genomme Materien¹⁾ haben keine oder wenigstens keine erschöpfende Behandlung in dem Werke erfahren können. So ist, um nur eins anzuführen, das wichtige Rösselsprungproblem, dem allein die Hälfte eines Bandes gewidmet werden sollte, bedauerlicherweise nur ganz stiefmütterlich behandelt und hat zurückstehen müssen hinter anderen, in dem überhaupt etwas breit angelegten Werke vertretenen Dingen, die weder den Mathematiker aus principiellen, noch den Laien aus allgemeinen Gründen auch nur annähernd in gleichem Maße interessieren dürften. — Die deutsche Litteratur besitzt ein ähnliches Werk, wie das Lucas'sche, nicht. Die einzigen in Betracht kommenden Erscheinungen der neueren Zeit, welche auf selbständige Bedeutung Anspruch erheben dürfen, die „Mathematischen Musestunden“ und „Zwölf Geduldspiele“ des Herrn Prof. Dr. Schubert, sind ausgesprochenermassen unter vorwiegender Rücksichtnahme auf den nicht mathematisch gebildeten Leser geschrieben.

1) Eine Disposition für diese Bände findet man in der schon erwähnten und gleichfalls posthumen „Arithm. amus.“ p. 210 Anm.

Man findet daher dort, ebenso wie in dem sonst allerdings mehr einer strengeren Behandlung zuneigenden vorzüglichen englischen Werke „Mathematical Recreations“ von Rouse Ball, neben den gewöhnlich zu den „problèmes plaisants“ gerechneten auch mancherlei Probleme in populärer Darstellung behandelt, welche in der rein wissenschaftlichen Litteratur eine strenge und erschöpfende Erledigung gefunden haben, wie z. B. das Problem der Quadratur des Kreises etc.

Dem gegenüber stellte sich nun der Unterzeichnete zunächst die Aufgabe, die in dem Lucas'schen Werke gebliebenen Lücken auszufüllen und alle diejenigen einschlägigen Materien historisch und kritisch zu bearbeiten, welche nicht nur bei dem Laien, sondern auch bei dem Fachmann auf Interesse rechnen dürfen, dabei jedoch alle solche in derartigen Sammelwerken beliebte Gegenstände auszuschließen, welche entweder dem Fachmathematiker trivial erscheinen müssen oder wenigstens keinerlei *wissenschaftliches* Interesse zu erregen vermögen. Andererseits enthält das vorliegende Buch wieder zahlreiches, in der Litteratur zerstreutes Material, das man in keinem der oben genannten oder ähnlichen Werke findet. Dafs der Verfasser sich ferner nicht darauf beschränkt hat, alte Theorien zu reproducieren resp. in neue Formen umzugiefsen, sondern auch eigene Untersuchungen angestellt hat, wird der Specialist dieses Gebietes an vielen Stellen unschwer erkennen und zwar um so leichter, als überall die einschlägige Litteratur sorgfältig angegeben ist. Bezüglich der litterarischen Studien hat der Verfasser keine Mühe gescheut und die ganze Litteratur so weit durchforscht, als ihm dies — neben einer amtlichen Stellung in einer Stadt ohne die bescheidenste wissenschaftliche Bibliothek — nur irgend möglich war; wenn es ihm trotz aller Bemühungen schwerlich gelungen sein wird, alle vielleicht beachtenswerten Erscheinungen gebührend zu berücksichtigen, so wird man ihm hierfür zur Entschuldigung zugestehen, dafs die Litteratur dieses Gebietes nicht nur an sich sehr umfangreich ist, sondern sich auch noch auf viele, keineswegs immer exclusiv wissenschaftliche und daher oft

sehr schwer zugängliche Publicationsorgane verteilt, aus welchen Gründen man auch in den betreffenden Originalarbeiten in sehr vielen Fällen bedauerlicherweise jede Kenntnis der früheren und Bezugnahme auf diese vermisst. So verursachte auch die Beschaffung der auf den allgemeinen Bibliotheken gewöhnlich recht spärlich vertretenen Schachlitteratur einige Schwierigkeit; zu um so größerem Danke fühle ich mich daher der „Berliner Schachgesellschaft“ und dem „Magdeburger Schachclub“ verpflichtet, welche mir die Benutzung ihrer Bibliotheken in der liberalsten Weise gestatteten. Selbst nicht gewohnheitsmäßiger Schachspieler, verdanke ich dem Verkehr mit Herrn Oberlehrer E. Schollwer in Heiligenbeil, früherem Präsidenten des „Magdeburger Schachclubs“, mehrfache Belehrung über schachtechnische und schachlitterarische Dinge, ohne daß sich dies an den einzelnen Stellen immer zum Ausdruck bringen liefs.

Als Ziel schwebte mir eine Darstellung vor, welche einerseits auch für den gebildeten Laien nicht unlesbar ist, andererseits aber doch die wichtigsten wissenschaftlichen Gesichtspunkte, wie Beziehungen zu rein mathematischen Fragen, wenn auch kurz, so doch klar hervortreten läfst. Bei dem ganz elementaren Charakter der meisten Probleme erschien mir eine solche Aufgabe nicht unmöglich. Erfordert doch das Verständnis des vorliegenden Buches nur ganz geringe positive mathematische Kenntnisse, wenn auch eine gewisse Übung im mathematischen Denken überhaupt eine unerläßliche Vorbedingung sein dürfte. Um dem Laien die Lektüre zu erleichtern, sind solche Partien, welche in erster Linie an die Adresse des Fachmanns gerichtet sind und die zu überschlagen für den Laien zunächst geraten sein dürfte, durch kleineren Druck ausgezeichnet. Der Verfasser verhehlt sich nicht, daß es ihm trotzdem nicht immer gelungen sein wird, allen Ansprüchen nach beiden Seiten hin gerecht zu werden, und appelliert hier in Hinsicht auf die Schwierigkeit der Aufgabe, eine allgemein verständliche und doch wissenschaftlich genügende Darstellung zu geben, an die gütige Nachsicht hüben und drüben.

Der ausführliche dem Buche beigegebene litterarische Index, der bezüglich der früheren Jahrhunderte sich zum großen Teil allerdings nur auf die bekannten Bibliographien stützt, enthält nur diejenige Litteratur, welche die in dem Buche behandelten Materien direkt betrifft, so daß also im Text nur gelegentlich citierte Publikationen, wie z. B. auch die umfangreiche Litteratur der Analysis situs, soweit sie nicht gerade direkt verwertet wurde, nicht aufgeführt sind. Meine ursprüngliche Absicht, jeden Artikel möglichst mit einer kurzen Inhaltsangabe zu versehen, erwies sich auf einem zu dem ganzen Buche im Verhältnis stehenden Rahmen als undurchführbar; als Ersatz hierfür sind bei jedem in dem Text citierten Artikel die betreffenden Seiten unseres Buches in fettgedruckten Zahlen angegeben, so daß immerhin das Buch selbst über den Inhalt der wichtigsten neueren Erscheinungen eine gewisse schnelle Orientierung giebt. Gleichfalls durch Rücksicht auf den Raum war es geboten, kleinere Artikel ohne besondere Titel aus den „Educational Times Reprints“, dem „Intermédiaire des mathématiciens“ etc. trotz ihres oft hohen Wertes im allgemeinen im Index fortzulassen, zumal wenn sich im Text passende Gelegenheit zu einer Erwähnung geboten hatte. Ebenso durften auch solche kleineren Publikationen unerwähnt bleiben, die inhaltlich in größere Arbeiten desselben Autors später aufgenommen sind; dies letztere gilt z. B. von verschiedenen kleineren Aufsätzen Ed. Lucas' u. a. — Dem litterarischen Index folgen ein Sach- und Namenregister.

Für die bei der Korrektur von mehreren Seiten mir zu teil gewordenen wertvollen Unterstützungen sage ich auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank.

Magdeburg, im Oktober 1900.

W. Ahrens.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Kapitel I. Erschwerte Überfahrten	1
§ 1. Wolf, Ziege Kohlkopf	1
§ 2. Die drei Ehepaare	3
§ 3. Überfahrten mit größerem Boot	7
§ 4. Eine Insel im Flufs	8
§ 5. 3 Herren und 3 Sklaven	9
Kapitel II. Ein Problem Tait's	12
Kapitel III. Numerationssysteme	22
§ 1. Verschiedene Zahlensysteme	22
§ 2. Das dyadische System	27
§ 3. Verschiedene Spiele und Aufgaben	29
I. Das Erraten einer gedachten Zahl	29
II. Ein Bild, das jemand sich gedacht hat, zu erraten	29
III. Der Lucas'sche Turm („Turm von Hanot“)	31
IV. Der Baguenaudier	32
§ 4. Das Bachet'sche Gewichtsproblem	40
§ 5. Gergonne's Haufenproblem	49
Kapitel IV. Umfüllungsaufgaben	53
§ 1. Die älteste Form der Aufgabe und ihre Bachet'schen Lösungen	53
§ 2. Allgemeine Methoden für die Zweiteilung	55
§ 3. Bedingungen der Lösbarkeit	58
§ 4. Teilung nach beliebigem Verhältnis	60
§ 5. Dreiteilung	64
Kapitel V. Parquetierungen	66
Kapitel VI. Einige kleinere Unterhaltungen	72
§ 1. Ein Bachet'sches Spiel	72
§ 2. Mutus dedit nomen cocis	73
§ 3. Ein Kartenkunststück Monge's	74
§ 4. Onkel und Neffe	78
Kapitel VII. Brettspiele	80
§ 1. Mathematische Theorien der Brettspiele	80
§ 2. Die einfachste Form des Mühlespiels	85
§ 3. Schaf und Wolf	89

	Seite
Kapitel VIII. Das Nonnen- oder Einsiedler-(Solitär-)spiel	94
§ 1. Spielregel. Notation	94
§ 2. Lösungen von Busschop und Reifs	96
§ 3. Symmetrie und Reziprozität von Lösungen	100
§ 4. Erweiterte Spielregel Reifs'. Kriterien der Unlösbarkeit	102
§ 5. Das Solitärspiel mit 33 Löchern	107
§ 6. Tripelzüge	108
§ 7. Das Solitärspiel mit 37 Löchern	109
§ 8. Das Solitärspiel mit 41 Löchern	111
Kapitel IX. Das Achtköniginnenproblem	114
§ 1. Historische Einleitung	114
§ 2. Die Aufgabe auf dem Brett von 16 Feldern	115
§ 3. Das Brett von 25 Feldern. Zusammengehörige Lösungen. 36 Felder	117
§ 4. Die bisher untersuchten Fälle. Das Auftreten der ver- schiedensten Felder und Farben in den Lösungen	122
§ 5. Methoden zur Auffindung der Lösungen	129
§ 6. Die doppelt-symmetrischen Lösungen	134
§ 7. Anzahl der Lösungen für die entsprechenden Turm- und Läuferprobleme	140
Anhang. Zugzahlen der verschiedenen Figuren	151
Kapitel X. Die 5 Königinnen auf dem Schachbrett	157
Kapitel XI. Der Rösselsprung	165
§ 1. Einleitung. Definitionen und Vorbemerkungen	165
§ 2. Eine Aufgabe Guarini's	167
§ 3. Euler'sche Rösselsprünge	168
§ 4. Das Warnsdorf'sche Verfahren	170
§ 5. Rösselsprünge auf Brettern anderer Form	172
§ 6. Methoden von Volpicelli und Minding	175
§ 7. Methode Collini's	179
§ 8. Methode Vandermonde's	185
§ 9. Methode Ciccolini's	188
§ 10. Methode von Frost	192
§ 11. Magische Rösselsprünge	196
§ 12. Kubische Rösselsprünge	198
§ 13. Anzahlbestimmungen	199
§ 14. Das Problem des Bretttaufs für die übrigen Schach- figuren	203
Kapitel XII. Magische Quadrate	209
§ 1. Historische Einleitung	209
§ 2. Magische Quadrate von 9 und 16 Zellen	211
§ 3. Quadrate von ungerader Zellenzahl	214
§ 4. Andere Methoden für ungerade Zellenzahl	217
I. Eine Methode der Inder	218
II. Bachet's Terrassenmethode	221
III. Moschopulos' Springer-Methode	224
IV. Methode von J. Horner und H. Scheffler	231

	Seite
§ 5. Quadrate von gerader Zellenzahl	234
§ 6. Stifel'sche Quadrate	239
§ 7. Zusätze	246
Kapitel XIII. Euler'sche Quadrate	248
§ 1. Das Problem der 36 Offiziere	248
§ 2. Gauß'sche Quadrate	253
Kapitel XIV. Anordnungsprobleme	257
Abschnitt I. Verschiedene Anordnungen	257
§ 1. Anordnungen im Kreise	257
§ 2. Promenaden zu je zwei und Paarung der Teilnehmer von Schachturnieren	260
§ 3. Promenaden von n^2 Personen zu je n	272
Abschnitt II. Kirkman's Schulmädchen-Problem	274
§ 1. Einleitung. Verwandte Probleme	274
§ 2. Lösungen des Kirkman'schen Problems	277
§ 3. Sylvester's Forderung	282
§ 4. Erweiterungen und Verallgemeinerungen	284
Kapitel XV. Das Josephsspiel	286
§ 1. Geschichte und Wesen des Spiels	286
§ 2. Die umgekehrte Aufgabe	289
§ 3. Oberreihen	291
§ 4. Die Busche'sche Lösung	295
§ 5. Das Verfahren Schubert's	299
Kapitel XVI. Einiges aus der Analysis situs	302
§ 1. Liniensysteme	302
§ 2. Bäume	304
§ 3. Einiges aus der Morphologie der Polyeder	306
§ 4. Die baumförmigen Liniensysteme in der Chemie	311
§ 5. Geschlossene Kreise	313
Kapitel XVII. Brücken und Labyrinth	317
§ 1. Das Euler'sche Brückenproblem	317
§ 2. Labyrinth	321
§ 3. Durchwanderung aller Wege eines Labyrinths	323
Kapitel XVIII. Das Hamilton'sche Dodekaederspiel	327
§ 1. Geschichte und Wesen des Spiels	327
§ 2. Wanderungen ohne Vorschriften über Reihenfolge der Stationen	329
§ 3. Wanderungen bei vorgeschriebenen Anfangsstationen	332
§ 4. Weitere Aufgaben Hamilton's	336
§ 5. Das Ikosaederspiel. Die übrigen regulären Polyeder	337
Kapitel XIX. Das Farben-Karten-Problem	340
§ 1. Wesen und Geschichte des Problems	340
§ 2. Nachbargebiete auf einfach zusammenhängenden Flächen	341
§ 3. Nachbargebiete auf der Ringfläche	343
§ 4. Eine Verallgemeinerung des Kartenproblems	346
§ 5. Ein Satz von Tait	347

	Seite
Kapitel XX. Das Boss-Puzzle oder Fünfzehner-Spiel. . .	351
§ 1. Geschichte, Litteratur und Beschreibung des Spiels . . .	351
§ 2. Das elementare Puzzle. Lösbarkeit und Unlösbarkeit . . .	353
§ 3. Mathematische Theorie des Spiels	355
§ 4. Das Puzzle mit Schranken.	360
§ 5. Das gegliederte Puzzle	365
Kapitel XXI. Das Dominospiel.	367
§ 1. Einleitung. Das Spiel mit 28 Steinen.	367
§ 2. Zusammenhängende Domino-Ketten.	369
§ 3. Ketten von 6 und 15 Steinen.	371
§ 4. Methode Tarry's	373
§ 5. Ketten von 28 Steinen.	376
Kapitel XXII. Zeit und Kalender.	381
§ 1. Gemeine und Schaltjahre	381
§ 2. Immerwährender Kalender	382
§ 3. Berechnung des Osterdatums.	387
§ 4. Der Jahrhundertanfang	389
Kapitel XXIII. Geometrische Konstruktionen durch Falten von Papier	394
Zusätze und Berichtigungen	401
Litterarischer Index	403
Sachregister.	420
Namenregister.	424

Kapitel I.

Erschwerte Überfahrten.

Saepe notavimus, nusquam homines quam in ludicris ingeniosiores esse: atque ideo ludos Mathematicorum curam mereri, non per se, sed artis inveniendi causa.

LEIBNIZ, „Annotatio de quibusdam ludis“ etc.
Miscellanea Berolinensia 1710.

§ 1. Wolf, Ziege, Kohlkopf.

Eine wahrscheinlich auf Alcuin zurückgehende und noch heute häufig gestellte Aufgabe¹⁾ verlangt von einem Fährmann, einen Wolf, eine Ziege und einen Kohlkopf über einen Fluß zu setzen, wenn der beschränkte Raum seines Bootes ihm nur gestattet, eins der drei zu gleicher Zeit mitzunehmen, er andererseits aber verhindern soll, daß in seiner Abwesenheit während einer der Überfahrten der Wolf die Ziege frisst oder die Ziege den Kohlkopf. — Zunächst muß der Fährmann natürlich die Ziege hinübernehmen und dann allein zurückfahren. Für die Fortsetzung ergeben sich dann 2 Möglichkeiten: Es kann darauf zunächst der Wolf hinübergeworfen werden, dann muß aber, damit Wolf und Ziege am jenseitigen Ufer nicht allein bleiben, die letztere wieder mit zurückgenommen werden, alsdann der Kohlkopf hinübergebracht und dann nach nochmaliger Rückfahrt die Ziege geholt werden.

1) Nach Cantor, „Die römischen Agrimensoren“ Leipzig 1875, p. 149 findet sie sich in Aufgabensammlungen, welche ohne Nennung eines besonderen Verfassers zugleich mit zuverlässig alcuinischen Schriften um das Jahr 1000 Verbreitung fanden. S. a. Cantor, Geschichte der Mathematik II, p. 332.

Wir geben diese Lösung nachstehend kurz schematisch und stellen zugleich die zweite, noch nicht angegebene Lösung, welche sich von der ersteren nur in der Reihenfolge der einzelnen Operationen unterscheidet, daneben, wobei wir immer unter einer Nummer je eine Überfahrt und darauffolgende Rückfahrt vereinigen:

Lösung I	Lösung II
1) Ziege hinüber	1) Ziege hinüber
2) Wolf hinüber Ziege zurück	2) Kohlkopf hinüber Ziege zurück
3) Kohlkopf hinüber	3) Wolf hinüber
4) Ziege hinüber	4) Ziege hinüber.

Eine andere Aufgabe dieser Art ist die folgende:

Eine Abteilung Soldaten kommt an einen Fluß, über den keine Brücke führt. Auf dem Fluß spielen 2 Knaben in einem Boot, das jedoch so klein ist, daß es nicht mehr als einen Soldaten trägt. Wie läßt sich mittels des Boots und der Knaben die Überfahrt bewerkstelligen?

Die Lösung ergibt sich leicht in der Weise, daß immer in je 2 Hin- und Herfahrten ein Soldat übergesetzt wird, indem zunächst beide Knaben übersetzen und einer von ihnen am jenseitigen Ufer zurückbleibt, während der andere das Boot zurückbringt und es einem Soldaten zur Verfügung stellt, der nun damit übersetzt, um es dann durch den am jenseitigen Ufer zurückgebliebenen Knaben zurückbringen zu lassen. Dieser Vorgang wiederholt sich dann so oft, wie Soldaten vorhanden sind.

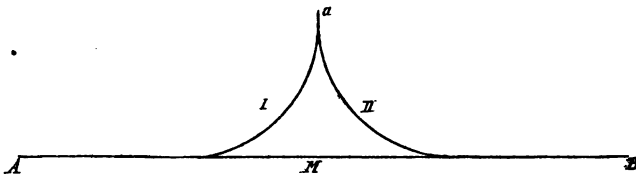


Fig. 1.

Eine andere Aufgabe verlangt folgendes:

Auf einem Eisenbahngleise AMB (s. Fig. 1) befindet sich

eine Lokomotive, auf den seitlichen Kurvensträngen I und II bzw. die Wagen W_1 und W_2 ; die den beiden Kurven gemeinsame Spitze a ist lang genug, um einen der Wagen aufzunehmen, nicht aber reicht sie für die Lokomotive aus. Wie kann die Lokomotive den Wagen W_1 auf den Strang II und W_2 auf I bringen?

Man findet leicht folgende Lösung: Die Lokomotive fährt zunächst in der Richtung nach B , dann zurück auf II, schiebt W_2 bis a , läßt W_2 dort stehen, fährt selbst über M in I ein und schiebt W_1 so weit zurück, daß er mit W_2 zusammengekoppelt werden kann. Dann zieht die Lokomotive beide Wagen von I fort nach M und läßt W_2 dort stehen, während W_1 wieder auf I bis nach a geschoben wird, wo er zurückgelassen wird. Hierauf spannt sich die Lokomotive vor den auf M zurückgebliebenen W_2 und schiebt ihn, wie verlangt, auf I fährt dann allein über M nach II bis an den auf a befindlichen Wagen W_1 , zieht diesen auf II herauf — und das Verlangte ist geleistet.¹⁾

§ 2. Die drei Ehepaare.

Eine andere verwandte Aufgabe finden wir in Bachet's „Problèmes plaisants et délectables“⁽²⁾, nämlich:

3 eifersüchtige Ehemänner befinden sich mit ihren Frauen am Übergang über einen Fluß und treffen dort ein kleines Boot ohne Fährmann, das nur 2 Personen faßt. Wie ist die Überfahrt zu bewerkstelligen, wenn sich dabei niemals eine Frau ohne ihren Mann in Gesellschaft eines anderen Mannes befinden soll?

Stellen wir zunächst einmal die Aufgabe nur für den

1) Andere Aufgaben dieser Art findet man in der einschlägigen Litteratur vielfach, so z. B. bei Fourrey, Récréat. arithm. Paris 1899, p. 165.

2) l. c. 4. Aufl. 1879 p. 148. — 2. Aufl. 1624 p. 212. Auch diese Aufgabe findet sich zuerst in einer nur unwesentlich von dem Bachet'schen Wortlaut verschiedenen Fassung in den dem Alcuin zugeschriebenen „Propositiones ad acuendos iuvenes“ (Cantor, „Agrimensoren“ p. 149).

Fall zweier Paare, so sieht man, daß zunächst 2 Männer nicht übersetzen dürfen. Denn dann müßten entweder beide mit dem Boot zurückkehren, womit überhaupt nichts gewonnen wäre, oder aber der eine würde, um das Boot zurückzubringen, mit der Frau des anderen in dessen Abwesenheit zusammentreffen, was gegen die Vorschrift der Aufgabe verstößt. Es müssen also zunächst entweder 2 Frauen oder ein Ehepaar übersetzen. In jedem dieser beiden Fälle bleibt dann also eine Frau am jenseitigen Ufer zurück, während die andere resp. der Mann das Boot zurückbringt. Nach der ersten Hin- und Herfahrt befindet sich also eine Frau drüben. Nun könnten 2 Männer oder ein Paar übersetzen; letzteres ist aber unzulässig, weil dann der betr. Mann am jenseitigen Ufer die andere Frau ohne deren Mann antreffen würde; es müssen also jetzt 2 Männer übersetzen. Es bleibt dann nur noch eine Frau zurück, welche nun entweder durch ihren Mann oder durch die bereits übergesetzte Frau hinübergeholt wird. Schematisch stellt sich diese Lösung, wenn wir, wie auch weiterhin stets, die Männer durch A, B und die entsprechenden Frauen durch a, b bezeichnen und je eine Hinfahrt und darauf folgende Rückfahrt unter einer Nummer zusammenfassen, so daß also 1^a den Zustand nach der ersten Hinfahrt, 1^b nach der ersten Rückfahrt angiebt, folgendermaßen dar:

	Jenseits	Diesselts
	—	A, a, B, b
1^a)	$a, b; [A, a]$	$A, B; [B, b]$
1^b)	a	A, B, b
2^a)	a, A, B	b
2^b)	$A, B; [A, a]$	$a, b; [B, b]$
3^a)	A, B, a, b	—

Bei zwei Möglichkeiten ist die eine in Klammern daneben angegeben.

Wir fassen sodann den Fall der 3 Ehepaare ins Auge und geben in entsprechender schematischer Weise, wie folgt, die Lösung:

	Jenseits	Diesselts
	—	$A, a, B, b, C, c.$
1 ^a)	$a, b; [A, a]$	$A, B, C, c; [B, b, C, c]$
1 ^b)	a	$A, B, b, C, c.$
2 ^a)	a, b, c	A, B, C
2 ^b)	a, b	A, B, C, c
3 ^a)	a, b, A, B	C, c
3 ^b)	a, A	B, b, C, c
4 ^a)	a, A, B, C	b, c
4 ^b)	A, B, C	a, b, c
5 ^a)	A, B, C, a, b	c
5 ^b)	$A, B, C, a; [A, B, a, b]$	$b, c; [C, c]$
6 ^a)	A, B, C, a, b, c	—

Man erkennt leicht, daß es keine zweite Lösung giebt, abgesehen natürlich von denjenigen, welche aus dieser durch Vertauschung unter sich gleichberechtigter Elemente, wie etwa zweier Ehepaare, entstehen.

Diese Lösung giebt auch folgender lateinische Merkvers an:

It duplex mulier, redit una, vehitque manentem.

Itque una, utuntur tunc duo puppe viri.

Par vadit, redeunt bini; mulierque sororem

Advehit; ad propriam sive maritus abit.

Handelt es sich um 4 Ehepaare, so sieht man leicht, daß die beiden ersten Fahrten notwendig wieder in derselben Weise auszuführen sind. Für die dritte scheint sich zunächst auch folgende Eventualität zu bieten:

	Jenseits	Diesselts
3 ^a)	a, b, c, d	A, B, C, D
3 ^b)	a, b, c	$A, B, C, D, d,$

doch ist ein Fortschritt auf dieser Basis nicht möglich, da doch schließlic die Männer auch übersetzt werden müssen, das Boot jedoch nur 2 gleichzeitig faßt, mithin etwa die Frau c am jenseitigen Ufer mit A und B ohne ihren Mann zu-

sammentreffen würde. Die dritte Fahrt ist daher auch noch in derselben Weise zu bewerkstelligen wie oben. Am Ende derselben ist die Situation folgende:

Jenseits	Diesseits
<i>a, A</i>	<i>B, b, C, c, D, d.</i>

2 Männer setzen jetzt nicht über, da sie ihre Frauen in Gesellschaft eines Mannes zurücklassen müßten, ebenso wenig 2 Frauen, da sie am jenseitigen Ufer mit einem fremden Mann zusammentreffen würden, also muß schon ein Ehepaar übersetzen. Nun darf aber das Boot weder durch einen Mann noch durch eine Frau zurückgerudert werden, vielmehr muß es entweder durch das eben angekommene Ehepaar oder aber durch die beiden Männer zurückgeführt werden; dann kommen wir aber zu den Stellungen nach der 3. resp. 2. Fahrt zurück. Wir sehen somit, daß für 4 Ehepaare und a fortiori natürlich für mehr als vier unsere Aufgabe unlösbar wird.

Die nach den 3 ersten Fahrten erreichte Stellung:

Jenseits	Diesseits
<i>a, A</i>	<i>B, b, C, c, D, d</i>

legt eine Modifikation der Aufgabe nahe¹⁾, durch welche deren Lösbarkeit wieder hergestellt wird. Denkt man sich nämlich im Fluß eine Insel, so kann man die Aufgabe offenbar so lösen, daß nach dem obigen Schema zunächst das Ehepaar *a, A* statt auf das andere Ufer auf die Insel gebracht wird. Das Boot befindet sich nach dieser dritten Fahrt wieder am diesseitigen Ufer und kann nun dazu dienen, die übrigen 3 Ehepaare in bekannter Weise auf das jenseitige Ufer — unbekümmert um die Insel und deren Bewohner — zu befördern. Danach fährt eins der 3 Ehepaare nach der Insel zurück, von den beiden jetzt dort befindlichen Paaren bleiben die Frauen auf der Insel, während die Männer ans jenseitige

1) Dieselbe rührt her von Fontenay (s. Lucas, *Récréations mathématiques*, t. I, 2^{ième} éd. 1891, p. 15).

Ufer fahren. Die auf der Insel zurückgebliebenen 2 Frauen werden dann nacheinander von einer der bereits übergesetzten Frauen abgeholt.

§ 3. Überfahrten mit größerem Boot.

Die Überfahrt von 4 Ehepaaren ist auch ohne Insel noch dann möglich, wenn das Boot 3 statt 2 Personen faßt. Es ergibt sich leicht folgende Lösung:

	Jenseits	Diesselts
	—	<i>A, a, B, b, C, c, D, d</i>
1 ^a)	<i>a, b, c</i>	<i>A, B, C, D, d</i>
1 ^b)	<i>a, b</i>	<i>A, B, C, c, D, d</i>
2 ^a)	<i>a, b, c, d</i>	<i>A, B, C, D</i>
2 ^b)	<i>a, b, c</i>	<i>A, B, C, D, d</i>
3 ^a)	<i>a, b, c, A, B, C</i>	<i>D, d</i>
3 ^b)	<i>a, b, A, B</i>	<i>C, c, D, d</i>
4 ^a)	<i>a, b, A, B, C, D</i>	<i>c, d</i>
4 ^b)	<i>a, A, B, C, D</i>	<i>b, c, d</i>
5 ^a)	<i>a, b, c, d, A, B, C, D</i>	—

Auch bei 5 Ehepaaren ist unter dieser Annahme die Aufgabe noch lösbar; die Fahrten 1, 2, 3 sind in genau derselben Weise auszuführen, auf der vierten werden sodann statt der 2 Männer *C, D* die 3 *C, D, E* übergesetzt und dann die Frauen auf 2 Fahrten von einer der bereits übergesetzten hinübergeholt. Im ganzen erfordert die Lösung 6 Fahrten, wenn unter einer „Fahrt“ immer eine Hin- und Rückfahrt verstanden und die letzte Überfahrt (Hinfahrt), wie auch weiterhin stets, als voll gerechnet werden soll. Für 6 Ehepaare ist aber auch bei einem 3 Personen fassenden Boot die Aufgabe nicht mehr lösbar, da bei der vierten Überfahrt ein Mann am diesseitigen Ufer zurückbleiben und damit jede Fortsetzung vereiteln würde.

Der Fall der 6 Paare wird dagegen lösbar, wenn das Boot 4 Personen faßt; unter dieser Bedingung ist auch der allgemeine Fall von n Paaren lösbar, da dann ja ein Paar successive alle anderen übersetzen kann. Die Anzahl der Fahrten für diesen Fall ist natürlich $n - 1$.

Stellen wir mit Lucas¹⁾ diese Ergebnisse tabellarisch zusammen, so ergibt sich, wenn n die Anzahl der Paare, N die der erforderlichen Fahrten und x die Anzahl der Personen bedeutet, welche das Boot faßt, folgendes:

$n = 2$	$x = 2$	$N = 3$
$n = 3$	$x = 2$	$N = 6$
$n = 4$	$x = 3$	$N = 5$
$n = 5$	$x = 3$	$N = 6$
$n > 5$	$x = 4$	$N = n - 1$.

§ 4. Eine Insel im Flufs.

Bei Annahme einer Insel im Flufs, einer Annahme, für welche wir bereits oben (S. 6) die Überfahrt von 4 Paaren durchführten, wird allgemein die Überfahrt von n Paaren möglich, auch wenn das Boot nur 2 Personen faßt.

Zunächst können offenbar leicht 3 Frauen a, b, c in 2 Fahrten nach der Insel gelangen, eine (c) der drei kehrt mit dem Boot zurück, während die beiden anderen (a, b) auf der Insel bleiben. Diesen 2 Frauen folgen jetzt ihre Männer nach der Insel nach, die beiden Frauen fahren dann nach dem jenseitigen Ufer weiter, eine von ihnen (b) führt das Boot zur Insel zurück und bleibt dort, während die beiden Männer A und B nach dem jenseitigen Ufer übersetzen. A bleibt dort bei seiner Frau, während B zu seiner Frau nach der Insel zurückkehrt. Wir haben jetzt also folgende Situation:

Jenseits	Insel	Diesseits
A, a	B, b	C, c, D, d, \dots
	(Boot)	

1) l. c. t. I, p. 222. In der letzten Reihe steht bei Lucas fälschlich $N = n$.

Nun führt *B* das Boot zum diesseitigen Ufer zurück, und *c, d* fahren damit zur Insel; eine von beiden (*d*) führt das Boot zurück, damit die Männer *B* und *C*, deren Frauen auf der Insel sind, zum jenseitigen Ufer übersetzen können. Von hier führt die Frau *a* dann das Boot zur Insel, um *b* an das jenseitige Ufer zu bringen, während darauf *C* mit dem Boot zu seiner Frau nach der Insel fährt. Wir haben also jetzt die Situation:

Jenseits	Insel	Diesseits
<i>A, a, B, b</i>	<i>C, c</i>	<i>D, d</i>
	(Boot)	

Vergleichen wir die beiden hier schematisch dargestellten Stellungen, so besteht der Fortschritt von der einen zur anderen darin, daß inzwischen ein weiteres Ehepaar übergesetzt ist, während sonst alles unverändert ist; man sieht sofort, daß durch eine Wiederholung derselben Operationen je ein weiteres Ehepaar übergesetzt werden kann, und wir kommen schließlich zu der Stellung, daß $n - 2$ Paare übergesetzt sind, eins dagegen sich noch am diesseitigen Ufer und eins auf der Insel befindet, also zu der Stellung

Jenseits	Insel	Diesseits
<i>A, a, B, b</i>	<i>Y, y</i>	<i>Z, z.</i>
	(Boot)	

Der Schluß ist dann so zu bewerkstelligen, daß *Y* mit dem Boot den *Z* abholt und beide nach dem jenseitigen Ufer fahren, während nun die Frau *a* die Frauen *y* und *z* einzeln von der Insel bezw. dem diesseitigen Ufer an das jenseitige führt.

§ 5. 3 Herren und 3 Sklaven.

Hierher gehört auch die folgende Aufgabe:

„Über einen Fluß wollen sich 3 Herren und 3 Sklaven in einem Boot übersetzen, das keinen Fährmann hat und nur 2 Personen faßt. Da aber zu befürchten steht, daß die Sklaven jeden Moment, wo sie in größerer Anzahl als die Herren zusammen sind, benutzen, um ihre Herren zu erschlagen, so sollen

weder am diesseitigen, noch am jenseitigen Ufer jemals mehr Sklaven als Herren sein.“

Man erkennt leicht, daß diese Aufgabe von der der 3 Ehepaare nicht wesentlich verschieden ist, denn auch dort läßt die einschränkende Bedingung sich so formulieren, daß die Frauen den Männern gegenüber nie in der Mehrzahl sein dürfen, was eben involvieren würde, daß sich mindestens eine Frau ohne ihren Mann in der Gesellschaft eines anderen befinden würde; nur erschienen bei jener Aufgabe nicht, wie hier, die verschiedenen Personen derselben Kategorie gleichwertig, sondern es bestand eine Zugehörigkeit zwischen je einem Mann und seiner Frau, worin jedoch nur eine scheinbare Erschwerung liegt.

Die Lösung ergibt sich daher auch ganz entsprechend der des früheren Problems, wie folgt: Zunächst setzt ein Sklave in 2 Fahrten die beiden anderen über und fährt das Boot zurück, 2 Herren setzen sodann über, und ein Herr und ein Sklave kehren wieder zurück, so daß sich jetzt am diesseitigen Ufer nur noch 2 Herren und 2 Sklaven befinden. Jetzt fahren die beiden Herren hinüber, während der bereits übergesetzte Sklave das Boot zurückführt, um in seinen weiteren Fahrten die anderen beiden Sklaven hinüberzuholen.

Die Aufgabe kann noch weiter durch die Bedingung erschwert werden, daß einige Personen nicht rudern können, jedoch muß, wie leicht ersichtlich, von den Herren, wie von den Sklaven wenigstens je einer rudern, damit die Aufgabe gelöst werden kann. Falls von den Herren nur einer rudert, dagegen alle Sklaven, so bleibt die obige Lösung bestehen, nur muß natürlich der rudernde Herr derjenige sein, welcher auf der dritten Fahrt hin- und zurückfährt. Wenn dagegen nur einer der Sklaven rudert, so erschwert dies die Lösung, welche sich nunmehr folgendermaßen gestaltet: Der rudernde Sklave setzt in 2 Fahrten die beiden anderen über und bringt das Boot zurück, dann fahren 2 Herren hinüber, und einer derselben kehrt mit einem Sklaven zurück. Damit nun später das Boot durch einen Sklaven zurückbefördert werden kann,

setzt jetzt ein Herr mit dem rudern den Sklaven über und kehrt statt dessen mit dem anderen, vorher übergesetzten Sklaven zurück. Die weitere Fortsetzung ist dann, wie zuvor, indem die beiden Herren übersetzen und dann der bereits übergesetzte rudern den Sklave zurückkehrt, um die beiden anderen Sklaven nach einander zu holen.

Diese Lösung bleibt auch noch bestehen, wenn außer einem rudern den Sklaven auch von den Herren nur einer rudert, nur muß natürlich gerade der rudern den Herr zu den verschiedenen Fahrten ausgewählt werden.

Sind die Sklaven alle des Ruderns unkundig, so ist die Aufgabe unlösbar, wenn wir nicht wieder zu der rettenden Annahme einer Insel im Fluß unsere Zuflucht nehmen. In diesem Fall ergibt sich leicht die Lösung, daß ein Herr successive je einen Sklaven nach der Insel und dem jenseitigen Ufer rudert, sodann die beiden anderen Herren übersetzt und darauf in 2 weiteren Fahrten die am diesseitigen Ufer und auf der Insel gebliebenen Sklaven holt.

Kapitel II.

Ein Problem Tait's.

*La vie n'est bonne qu'à étudier et à enseigner
les mathématiques.* POISSON.

§ 1.

Der bekannte englische Physiker Tait erzählt¹⁾, daß er einmal im Eisenbahnzuge folgende Aufgabe gelesen habe: *4 Sovereign und 4 Shilling folgen in bunter Reihe auf einander; sie sollen in 4 Zügen so umgelegt werden, daß die 4 Sovereign zusammen liegen und ebenso die 4 Shilling, wenn in einem Zuge immer nur zwei aufeinanderfolgende Stücke zusammen umgelegt werden dürfen, so zwar, daß die beiden dabei ihre relative Lage nicht ändern.*

Bezeichnet man die Sovereign durch B und die Shilling durch A , so ergibt sich leicht folgende Lösung:

- . . $A B A B A B A B$
- 1) $B A A B A B A . . B$
- 2) $B A A B . . A A B B$
- 3) $B . . B A A A A B B$
- 4) $B B B B A A A A . .$

Verändern wir die Spielregel jedoch dahin, daß mit jedem Zuge zugleich eine Vertauschung der beiden versetzten Münzen unter sich verbunden ist²⁾, so müssen wir auf die Forderung

1) Tait, „Listing's Topologie“ Philosophical Magazine 1884, I, p. 30—46.

2) s. Lucas, L'Arithmétique amusante, Paris 1895, p. 97.

einer Lösung in 4 Zügen verzichten; in 5 Zügen erhalten wir dagegen leicht folgende Lösung:

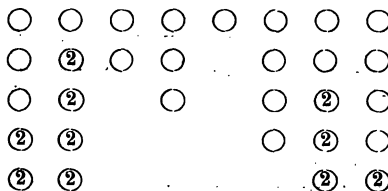
- . . A B A B A B A B
- 1) A B A B A B A . . B
 - 2) A B A . . B A A B B
 - 3) A . . A B B A A B B
 - 4) A A A A B B . . B B
 - 5) A A A A B B B B . .

Bevor wir in der Behandlung dieser Aufgabe fortfahren, besprechen wir zunächst einige hiermit verwandte Aufgaben (§§ 2, 3); § 4 wird uns dann zu dem Tait'schen Problem zurückführen und eine Lösung für eine verallgemeinerte Form desselben, jedoch bei Beobachtung der ursprünglichen Spielregel liefern; das entsprechende bei Anwendung der modifizierten Spielregel (mit Vertauschung der versetzten Münzen) leistet sodann § 5.

§ 2.

*Acht Münzen liegen in einer geraden Linie; wie kann man dadurch, daß man eine Münze immer über je zwei — nach links oder rechts — springen läßt und auf die dritte legt, erreichen, daß alle Münzen zu Paaren angeordnet werden?*¹⁾

Bezeichnen wir die Münzen durch kleine Kreise und deuten wir, wenn mehrere über einander liegen, die Anzahl durch eine in den Kreis geschriebene Ziffer an, so ergibt sich die Lösung leicht folgendermaßen:



1) Lucas, Récréat. t. II, édit. II, p. 139.

Man erkennt leicht, daß für weniger als 8 Münzen die Aufgabe nicht lösbar ist, dagegen für jede größere geradzahlige Anzahl. Braucht man doch nur die vierte Münze auf die erste, dann die sechste auf die zweite etc. zu legen, bis nur noch acht einzelne im Innern übrig bleiben, und auf diese die obige Lösungsmethode anzuwenden.

Herr Delannoy hat diese Aufgabe folgendermaßen verallgemeinert¹⁾:

m · n Münzen liegen in einer Geraden; man soll aus ihnen m Haufen von je n formen dadurch, daß man immer eine Münze über n andere springen läßt und auf die (n + 1)te — nach rechts oder links — legt.

Dabei muß aber, soll die Aufgabe lösbar sein, $m \geq 4$ sein, wie ja auch in dem bereits betrachteten Specialfall. Die Lösung ergibt sich nach dem Obigen von selbst. Nehmen wir z. B. $n = 4$, $m = 4$ an, also

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○

so springt zunächst 7 auf 2, dann 8 auf 2, dann 10 auf 15, und 9 auf 15; wir haben dann folgendes Bild:

1	2	3	4	5	6					11	12	13	14	15	16
○	③	○	○	○	○					○	○	○	○	⑧	○

Jetzt springt 6 auf 15 und 12 auf 2 und dann successive 3, 4, 5 über 2 auf 1 und 11, 13, 14 über 15 auf 16.

Es ist ohne weiteres ersichtlich, daß sich diese Methode bei $m = 4$ und beliebigem n stets anwenden läßt²⁾; ist aber $m > 4$, so kann man, wie bereits oben für $n = 2$ angegeben, an dem einen Ende $m - 4$ Haufen zu je n formieren, so daß noch $4n$ einzelne Münzen in einer ununterbrochenen Reihe übrig bleiben. Da jeder Stein hierbei höchstens ein-

1) s. Lucas, Récréat. t. II, p. 140.

2) Bei Lucas, Récréat. t. II, p. 140 ist das ausführliche Lösungsschema für $n = 3$, $m = 4$ gegeben.

mal gezogen wird, andererseits aber auch nur die Grundsteine der m Haufen ungerührt bleiben, so beträgt die Anzahl der Züge also $m \cdot n - m$.

§ 3.

Auf 5 in einer geraden Linie befindlichen Feldern seien auf 1 und 2 weiße und auf 4 und 5 schwarze Steine, während 3 leer sein soll. Wie ist es einzurichten, daß die weißen Steine die Plätze der schwarzen und umgekehrt einnehmen, wenn jeder Stein nach rechts oder links auf das benachbarte leere Feld vorrücken, wie auch über einen benachbarten Stein hinweg auf das leere Feld springen darf?¹⁾

Es ergibt sich leicht folgende Lösung mit einer symmetrischen Stellung in der Mitte und zwei zu einander reziproken Hälften zu beiden Seiten derselben:

1	2	3	4	5
○	○	.	●	●
○	.	○	●	●
○	●	○	.	●
○	●	○	●	.
○	●	.	●	○
.	●	○	●	○
●	.	○	●	○
●	●	○	.	○
●	●	.	○	○

Für den allgemeinen Fall — je n weiße und schwarze Steine — ergibt sich, wenn wir mit V das Vorrücken auf das benachbarte leere Feld und mit S einen Sprung bezeichnen, folgende von Herrn van den Berg herrührende Lösung²⁾, wobei die einzelnen Reihen abwechselnd die Operationen der weißen und der schwarzen Steine angeben:

1) Lucas, Récréat. t. II, p. 141 oder L'arithmétique amusante, p. 117.

2) Lucas, Arithm. amus. p. 124.

$$\begin{array}{l}
 1 V \\
 1 S, 1 V \\
 2 S, 1 V \\
 3 S, 1 V \\
 \vdots \\
 (n-1) S, 1 V \\
 n S \\
 1 V, (n-1) S \\
 1 V, (n-2) S \\
 \vdots \\
 1 V, 3 S \\
 1 V, 2 S \\
 1 V, 1 S \\
 1 V.
 \end{array}$$

Die Gesamtzahl der Züge — jedes einzelne V , sowie S besonders gerechnet — ist $n(n+2)$.

Eine Abart unserer Aufgabe ist die folgende:

Unter Beibehaltung derselben Spielregel sollen auf nebenstehendem Brett weiße und schwarze Steine die Plätze wechseln.¹⁾

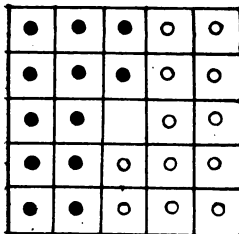


Fig. 1.

Zunächst vollzieht man den Platzwechsel zwischen den beiden Farben in der mittleren Horizontalen in der oben angegebenen Weise; dann schiebt man sich an, dasselbe für die mittlere Verticale zu machen, hält aber nach jedem Zuge inne, um die Vertauschung erst in derjenigen Horizontalen vorzunehmen, in der sich gerade das leere Feld befindet. Da successive alle Felder der mittleren Verticalen einmal leer werden, so läßt sich die Vertauschung überall ausführen.

1) Lucas, Récréat. t. II, p. 144.

§ 4.

Wir kehren nunmehr wieder zu dem Tait'schen Problem zurück und denken uns bei unveränderter Spielregel dasselbe dahin verallgemeinert, daß n Paare von Münzen, also n Sovereign und n Shilling oder, wie wir jetzt der übersichtlicheren Darstellung halber sagen wollen: n weiße und n schwarze Steine vorliegen.

Nach Methoden von Herrn Delannoy¹⁾ ergibt sich die Lösung in folgender Weise:

I. n ist gerade. Der erste Zug besteht dann stets darin, die zweit- und drittletzte Münze nach vorne zu legen; wir gehen daher bereits von der hiernach erhaltenen Stellung aus und erhalten also für $n = 12$ z. B.



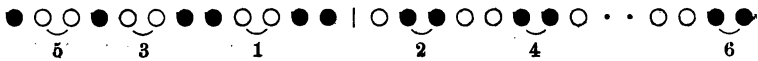
Durch die darüber geschriebenen Ziffern soll nun hier, wie auch weiterhin stets, angedeutet werden, welche Paare der Reihe nach in den nächsten $\frac{n}{2} - 1$ Zügen in die leeren Plätze einzurücken haben. Ein Bild von der hierdurch erreichten Stellung erhalten wir am besten, wenn wir bedenken, daß die Plätze von 5 leer und die oben leeren durch 1 ausgefüllt werden, daß ferner das Paar 5 an die Stelle von 4 rückt oder, was für den schließlichen Effekt dasselbe ist, daß die beiden Münzen von 4 ihre Plätze vertauschen, ebenso die von 3, 2 und 1, da hier, wie auch weiterhin stets, die veretzten Paare abwechselnd aus weiß-schwarz und schwarz-weiß bestehen. Wir erhalten somit folgende Stellung:



Man sieht, daß nunmehr in der linken Hälfte die weißen Steine nur noch zu je 2 benachbarten vorkommen und das-

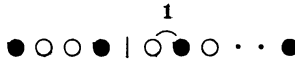
1) s. Lucas, La Nature, XV, 1887, 2^{ème} semestre, p. 10/11, sowie L'arithm. amus. p. 93—97.

selbe für die schwarzen in der rechten Hälfte gilt. Die erwünschte Stellung ergibt sich also leicht, indem wir abwechselnd ein weißes Paar von links in die leeren Plätze nach rechts und ein schwarzes von rechts nach links rücken, wobei nur so zu disponieren ist, daß das am rechten Ende stehende schwarze Paar zuletzt umgesetzt wird. Diese letzten $\frac{n}{2}$ Züge würden also etwa in folgender Reihenfolge auszuführen sein:



Auf eine solche Stellung, wie die eben beschriebene, werden wir stets nach den ersten $\frac{n}{2}$ Zügen kommen, und die letzten $\frac{n}{2}$ Züge ergeben sich daher ohne alle Schwierigkeit, so daß wir uns in den jetzt zu gebenden Schemen auf Angabe der ersten $\frac{n}{2}$ Züge, von denen der erste bereits ausgeführt ist, beschränken:

a) $n = 4$:



b) $n = 6$:



c) $n = 8$:



d) $n = 10$:



e) $n = 12$:



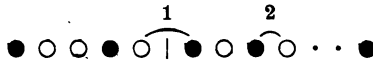
f) $n = 14$:



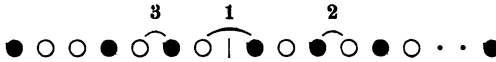
Man erkennt leicht, wie diese Reihe fortzusetzen ist.

II. n ist ungerade. Die erste Operation ist dann auch wieder für alle Fälle dieselbe, wie oben bei geradem n . In den nachfolgenden Schemen ist diese Operation daher wieder bereits ausgeführt, und die folgenden $\frac{n-1}{2}$ sind, wie oben, angedeutet. Nach Ausführung derselben kommt man wieder stets auf Stellungen, bei denen nur noch Paare von gleichartigen (weißen resp. schwarzen) Steinen zu versetzen sind; wir lassen daher auch hier wieder diese letzten $\frac{n-1}{2}$ Züge, die sehr leicht ausführbar sind, fort und geben im folgenden die Schemen:

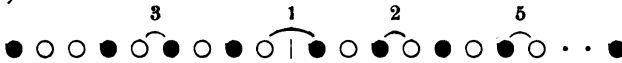
a) $n = 5$:



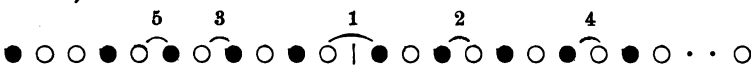
b) $n = 7$:



c) $n = 9$:



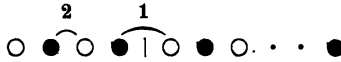
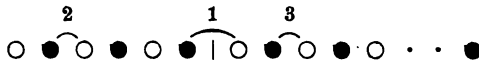
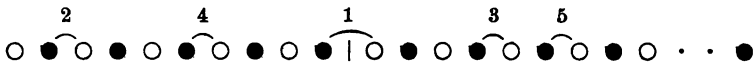
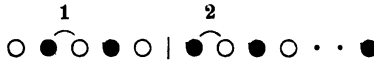
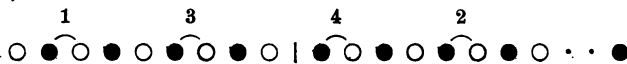
d) $n = 11$:



§ 5.

Legen wir jetzt die modifizierte Spielregel zu Grunde, welche bei jedem Zug zugleich eine Vertauschung der beiden versetzten Steine vorschreibt, so ergibt sich für den allgemeinen Fall von $2n$ Steinen eine Lösung jetzt nur in $n + 1$ Zügen.¹⁾ Wir geben dieselben nachstehend in unserer schematischen Schreibweise, wobei der erste Zug wieder, wie zuvor, in einer Versetzung des zweit- und drittletzten Steines, jetzt nur mit gleichzeitiger gegenseitiger Vertauschung, besteht und in unseren Schemen bereits überall ausgeführt ist.

1) s. Lucas, Arithm. amus. p. 106—108.

I. n gerade.a) $n = 4$:b) $n = 6$:c) $n = 8$:d) $n = 10$:II. n ungerade.a) $n = 5$:b) $n = 7$:c) $n = 9$:d) $n = 11$:

Da die in diesen Schemen versetzten Paare ausnahmslos aus einem schwarzen mit nachfolgendem weißen Stein bestehen, so erhält man die schließlich resultierende Stellung offenbar, indem man in die jetzt leeren Plätze weiß-schwarz setzt, in allen numerierten Paaren schwarz mit weiß vertauscht und die Plätze des letzten Paares leer läßt. Man

sieht dann leicht, daß in diesen Stellungen in der linken Hälfte die schwarzen Steine immer nur zu je zwei und in der rechten die weißen immer nur zu je zwei vorkommen, so daß die jetzigen Positionen von den entsprechenden in § 4 sich durch Vertauschung der beiden Farben unterscheiden, wie dies bei der Veränderung der Spielregel zu erwarten stand. Man erhält aus diesen Stellungen dann durch weitere $\frac{n}{2}$ resp. $\frac{n+1}{2}$ Züge leicht die verlangten Schlufsstellungen, indem man abwechselnd ein weißes Paar von rechts nach links und ein schwarzes von links nach rechts setzt und zum Schlufs das am Ende stehende schwarze Paar aufrücken läßt.

Kapitel III.

Numerationssysteme.

*Die ganzen Zahlen, hat der liebe Gott gemacht,
alles andere ist Menschenwerk.*

KRONECKER (s. Nekrolog von H. Weber,
Math. Ann. Bd. 43, 1893, p. 15).

§ 1. Verschiedene Zahlensysteme.

„Der Mensch ist das Maß aller Dinge“ sagt ein geflügeltes Philosophenwort.¹⁾ In der That, was war natürlicher, als daß der Mensch die Bestimmung von quantitativen Verhältnissen irgend welcher Art, welche doch stets auf eine Vergleichung hinauskommen muß, zunächst dadurch auszuführen suchte, daß er diesen Vergleich mit Bezug auf sich selbst anstellte. So maß er Längen und Entfernungen nach seinem Fuß, seiner Elle, der Klafter seines Armes, seinen Schritten, so gaben ihm auch seine Hände mit ihren 10 Fingern die einfachste und natürlichste Rechenmaschine ab. Fast stets beschränkten sich die Funktionen dieser Rechenmaschine allerdings auf bloße Abzählungen, doch kommen auch andere Anwendungen vor. So dienen noch heute in Syrien und Palästina die 10 Finger dazu, bei Voraussetzung der Kenntnis des Einmaleins bis 5×5 dasselbe bis zu 10×10 zu liefern und zwar in folgender Weise: Handelt es sich etwa um die Multiplikation 7×8 , so krümmt man, da $7 = 5 + 2$ und

1) Protagoras in Plato, Theätet 152 A. — Allerdings ist das Wort des griechischen Sophisten dort in etwas anderem Sinne gemeint, insofern als damit die Negation aller objektiven Wahrheit ausgesprochen werden soll.

$8 = 5 + 3$ ist, von der einen Hand 2 Finger und von der anderen 3, während die anderen Finger ausgestreckt bleiben; man zählt dann die gekrümmten Finger, hier 5, und nimmt diese Zahl zu Zehnern (50), multipliziert die Anzahlen der noch ausgestreckten Finger der beiden Hände, also hier $3 \times 2 = 6$, und addiert diese als Einer zu den obigen Zehnern, so daß man 56 erhält. Man befolgt also ein Verfahren, das sich in der Formel $(5 + a)(5 + b) = 10(a + b) + (5 - a)(5 - b)$ ausdrückt. Ist nur die eine Zahl größer als 5, so zerlegt man die Aufgabe, z. B. $4 \cdot 7 = 4 \cdot 5 + 4 \cdot 2$. Die Bengalen zählen nicht nur nach den einzelnen Fingern, vielmehr an jedem der 4 Finger, außer am Daumen, bis 4, entsprechend dem End- und den 3 Gelenkpunkten des Fingers, also im ganzen an jeder Hand bis 16.¹⁾

Die Benutzung dieser natürlichsten Rechenmaschine hat fast bei allen Völkern zu dem Decimalsystem geführt oder, wenn auch die unteren Extremitäten mit zu Hilfe genommen wurden, zu einem Vicesimalsystem. Als Spuren eines solchen dürfen wir z. B., um nur bei den bekannteren Kultursprachen zu bleiben, das französische *soixante-dix*, *quatre-vingt* und *quatre-vingt-dix* statt der wenigstens für den Schriftgebrauch abgeschafften oder doch nur noch in bestimmten Wendungen, wie z. B. „*la version des septante*“ (Bibelübersetzung der *Septuaginta*), erhaltenen, sonst aber familiär viel gebrauchten Formen *septante*, *octante* und *nonante* ansehen oder im Dänischen *halvtresindstyve* (dritthalbzwanzig $= 50$), *tresindstyve* (60), *halvfirsindstyve* (70), *firsindstyve* (80) etc., welche jedoch in neuerer Zeit, zumal in Norwegen²⁾, durch die entsprechenden decimalen Bezeichnungen verdrängt sind.³⁾

1) Lucas, *Réc. math.* t. III, p. 21.

2) Nach einer gelegentlichen Mitteilung meines hochverehrten Lehrers Prof. Dr. Sophus Lie †.

3) Weitere Beispiele findet man bei A. F. Pott, „Die quinäre und vigesimale Zählmethode bei Völkern aller Weltteile.“ Halle 1847. Vgl. auch von demselben „Die Sprachverschiedenheit in Europa, an den Zahlwörtern nachgewiesen.“ Halle 1868.

Durchgängig ist das Zehner- resp. die damit zusammenhängenden Fünfer- und Zwanzigersysteme jedoch keineswegs, besonders charakteristisch ist in dieser Hinsicht das undecimale System der Neu-Seeländer, welche besondere Wörter für 11, $11^2 = 121$ und $11^3 = 1331$ haben¹⁾, ferner „ein Vierersystem, welches nach Aristoteles bei einem thracischen Volksstamm existiert haben soll, das mit diesem vielleicht zusammenhängende Sechzehnersystem, welches Bopp in der Paginierung eines alten Codex des Mahabharata aufgefunden hat; das Siebenersystem, welches in der Zigeunersprache vorzukommen scheint; das Achzehnersystem, welches die Osseten, ein kaukasischer Volksstamm, besitzen sollen.“²⁾ Leibniz³⁾ glaubte bei den Chinesen ein System mit der Grundzahl 2 entdeckt zu

1) Cantor, Gesch. der Math. Bd. I, p. 9.

2) Aus Cantor, Mathem. Beiträge zum Culturleben der Völker. Halle 1863. p. 44. Man vgl. auch A. v. Humboldt „Über die bei verschiedenen Völkern üblichen Systeme von Zahlzeichen etc.“ Crelle's Journal IV, 1829, p. 205—231; Gergonne, Première leçon sur la numération. Annales de mathématiques de Gergonne XXI, 1830/31, p. 329—367.

3) „Explication de l'Arithmétique binaire“ etc. Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris 1703 = Mathem. Schriften, herausgegeben von Gerhardt, Abt. II, Bd. III, Halle 1863, p. 223—227 und „De Dyadicis“ Mathem. Schriften, ibid. p. 228—234; s. auch Leibniz' Briefwechsel mit Jac. Bernouilli, insbes. die Briefe vom 28. XI. 1704; 28. II. 1705; sowie den nun folgenden Brief Leibniz' ohne genaues Datum (Mathem. Schriften Abt. I, Bd. III, Halle 1855, p. 94 ff.), ferner „Lettre sur la philosophie chinoise“ Leibnitii Epistolae ad diversos, herausgeg. v. Chr. Kortholt. Leipzig 1734, p. 488 ff. Leibniz erblickte in der Möglichkeit, alle Zahlen durch 0 und die Einheit auszudrücken, bekanntlich einen mathematischen Beweis für die Erschaffung der Welt aus Nichts und widmete dem Herzog v. Braunschweig ein Medaillon, dessen Vorderseite das Bild des Herzogs aufwies, während auf der Rückseite die Zahlen 1—17 in dyadischer Schreibweise dargestellt waren mit der Randinschrift „omnibus ex nihilo ducendis sufficit unum“ und der Unterschrift „imago creationis“. Eine Abbildung dieser Medaille und eine Wiedergabe der Leibniz'schen Widmung findet man in der Schrift G. W. von Leibnitz Mathematischer Beweis der Erschaffung und Ordnung der Welt, entw. von Rud. Aug. Noltenius, Leipzig 1734.

haben, jedoch hat Herr Cantor, ursprünglich selbst auf diesem Standpunkt stehend¹⁾, dies später als irrig nachgewiesen.²⁾

Dafs das Decimalsystem bei der beschränkten Teilbarkeit seiner Grundzahl keineswegs vollkommen ist und besonders hinter dem Duodecimalsystem zurücksteht, braucht kaum erwähnt zu werden. In der That hat auch Simon Stevin, der geniale vlämische Mathematiker (1548—1620), vorgeschlagen, das decimale System durch ein duodecimales zu ersetzen.³⁾ Ob in einem maldivischen Sprachidiom die Zahl 12 als Basis vorkommt, wie eine Reisebeschreibung von Pyrard aus dem Jahre 1619 behauptet, muß nach Cantor²⁾ zweifelhaft erscheinen.

Übrigens haben wir, wenn auch nicht im Zahlensystem, so doch in manchen anderen Verhältnissen sextale resp. duodecimale Teilungen, wenngleich nicht immer die Erkenntnis von der Zweckmäßigkeit derselben ihre Entstehungsursache war. Eine Einteilung, welche von vornherein gegeben war, die des Sonnenjahres in Tage, gab, da die Babylonier dasselbe zu 360 Tagen erkannten, den Anlaß, auch die Kreisperipherie in 360 Grade zu teilen, und nachdem man erkannt hatte, dafs der Radius sich sechsmal auf die Peripherie abtragen läßt, zu den weiteren in der Zeitrechnung angewandten Teilungen

1) „Zur Geschichte der Zahlzeichen“, Zeitschr. für Mathem. und Phys. III, 1858, p. 338.

2) Cantor, Mathem. Beiträge zum Culturleben der Völker. Halle 1863, p. 44.

3) Von Karl XII. von Schweden wird erzählt, er habe sich mit der Absicht getragen, das dekadische System durch ein anderes zu ersetzen mit der Basis 64, soll wohl heißen „8“ (s. Voltaire, Oeuvres complètes. Gotha 1785, t. XXIII „Histoire de Charles XII“, p. 342/43). Auch sonst ist ein Octaval-System empfohlen, z. B. von Woolsey Johnson, „Octonary numeration“ New York Mathem. Soc. I, 1891/92, p. 1.—6; Gelin „Du meilleur système de numération et de poids et mesures“ Mathesis VI, 1896, 2^{ème} série, p. 161—164 u. a., während z. B. Stein, „Über die Vergleichung der verschiedenen Numerationssysteme“ Crelle's Journal I, 1826, p. 369—371 im ganzen eine Apologie des Decimalsystems giebt. Eine Kritik dieser keineswegs einwandfreien Betrachtungen würde uns hier zu weit führen.

in 60 Teile, nämlich der Stunde in 60 Minuten und dieser wieder in 60 Sekunden.¹⁾ Weiter gehören hierher die Einteilung der Fahrenheit'schen Thermometerskala, die Teilung des Fufs in 12 Zoll, des Shilling in 12 Pence, sowie die Bezeichnungen Dutzend, Grofs etc. Ob solche Einteilungen neben einem decimalen Zahlensystem auch noch zweckmäfsig sind, kann allerdings bezweifelt werden; bekanntlich wird daher ein auf Einladung der französischen Regierung demnächst in Paris zusammentretender Kongrefs sich mit der Frage der Decimalteilung der Zeit- und Winkelgröfsen beschäftigen.

Bildete sich somit auch fast überall das decimale Zahlensystem aus, so fehlte doch noch eine zweckmäfsige Darstellung desselben in Zeichen. Man vergegenwärtige sich die Zahlzeichen der Griechen und Römer, und man wird die Schwierigkeiten verstehen, welche das kleinste Multiplikationsexempel ihnen bereitete. Zu unserer modernen Schreibweise und der darauf basierenden einfachen Technik des Rechnens konnte es erst kommen, nachdem man auf den Gedanken gekommen war, auch der Null ein Zeichen einzuräumen, welche wichtige Erfindung wir den Arabern schulden. Hören wir z. B. von Sextus Julius Africanus²⁾, einem Schriftsteller des dritten nachchristlichen Jahrhunderts, dafs die Römer, um sich die Stärken von Truppenteilen gegenseitig zu telegraphieren, Fannale anwandten, so zwar, dafs sie in drei Haufen, von denen der rechte die Hunderter, der mittlere die Zehner und der linke die Einer bedeutete, je nachdem 1—9 Feuer anzündeten, so müssen wir hierin schon eine erhebliche Annäherung an die arabische Schreibweise anerkennen, und doch blieb der letzte und entscheidende Schritt ungethan, eben da die Null fehlte.

1) Cantor, Gesch. d. Math. I, p. 81.

2) Sextus Julius Africanus, *Κεστοί* (d. h. „Genähtes“ = Aneinandergeheftetes) Cap. 76 (*περὶ πλοσῶν*) in *Veteres Mathematici*, Paris 1693.

§ 2. Das dyadische System.

Dasjenige System, welches zur Grundzahl die 2 besitzt („dyadisches System“), ermöglicht natürlich eine Darstellung aller Zahlen mit nur zwei Zeichen, 0 und 1; in ihm stellen sich die Zahlen der Zahlenreihe folgendermaßen dar:

1 =	1	9 =	1001
2 =	10	10 =	1010
3 =	11	11 =	1011
4 = 2 ² =	100	12 =	1100
5 =	101	13 =	1101
6 =	110	14 =	1110
7 =	111	15 =	1111
8 = 2 ³ =	1000	16 = 2 ⁴ =	10000 etc.

Betrachten wir auch 1 als nullte Potenz von 2, so können wir hiernach offenbar sagen:

Satz: „Jede Zahl läßt sich als Summe von unter einander verschiedenen Potenzen der 2 (einschließlich der nullten) auf eine und nur eine Weise darstellen.“

Wir geben zunächst eine tabellarische Zusammenstellung der niedrigsten unter diesen Potenzen:

n	2 ⁿ
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
6	64
7	128
8	256

Eine praktische Bedeutung dieser Reihe von Potenzen der 2 mag der Leser darin erblicken, daß dieselbe die Maximalzahlen für die Ahnen eines Menschen in den verschiedenen Generationen angiebt: es hat jeder 2 Eltern, 4 Großeltern, weiter 4—8 Urgroßeltern, 4—16 Ururgroßeltern etc. —

wenigstens in denjenigen Ländern, in denen eine Ehe zwischen Geschwistern gesetzlich verboten, zwischen Vetter und Base dagegen zulässig ist.

Wir fügen zu der obigen Tabelle noch hinzu:

$$2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616.$$

Diese Zahl spielte angeblich eine Rolle bei der Erfindung des Schachspiels¹⁾, bei dem ja auf 64 Feldern gestritten wird. Der Erfinder desselben, Sissa ben Daher, sollte sich von dem indischen Könige Schachram eine Belohnung ausbitten und bat nun darum, daß man ihm das erste Feld seines Brettes mit einem Weizenkorn, das zweite mit zwei und jedes folgende mit der doppelten Anzahl belegte. Als Gesamtsumme ergibt sich alsdann

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{63} = 2^{64} - 1,$$

also ein Korn weniger als die obige 20-stellige Zahl angiebt, eine Menge, welche den Vorrat der königlichen Kornkammer weit überstieg und welche ausreichen würde, um das ganze feste Land der Erde bis zu einer Höhe von fast 1 cm zu bedecken.

Zu welch' großen Zahlen die Potenzen von 2 bei weiterer Fortsetzung der obigen Tabelle eben sehr bald werden, mag neben dem eben erwähnten Beispiel auch noch folgendes veranschaulichen: angenommen, es passiere um Mitternacht ein Verbrechen, etwa ein Mord; ein Augenzeuge teile dies in der ersten Viertelstunde 2 anderen Menschen mit und jeder dieser in der nächsten Viertelstunde 2 anderen, noch nicht benachrichtigten u. s. f., so wäre bereits bis 7 $\frac{1}{2}$ Uhr die ganze Menschheit davon unterrichtet. Es könnten um 7 $\frac{1}{2}$, d. h. nach Verlauf von 30 Viertelstunden bereits

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{30} = 2^{31} - 1,$$

ca. 2000 Mill., also mehr als die ganze Menschheit ausmacht, davon unterrichtet sein.

1) s. z. B. Max Lange, Lehrbuch des Schachspiels, Halle 1865 (2. Aufl.) p. 235.

§ 3. Verschiedene Spiele und Aufgaben.

Die in dem Satze des vorigen Abschnitts ausgesprochene Möglichkeit der Darstellung jeder Zahl als Summe verschiedener Potenzen von 2 findet bei zahlreichen Spielen und Aufgaben Anwendung, wovon wir hier jetzt einige Proben geben wollen.

I. Das Erraten einer gedachten Zahl.

In einer Gesellschaft denkt man sich eine Zahl, welche der vorher hinausgesandte A sich anheischig macht zu erraten, falls der mit ihm unter einer Decke spielende B ihn durch einige aneinandergelegte Münzen auf die richtige Fährte führen darf, wobei es, wie A und B etwa geheimnisvoll behaupten, auf die Winkel ankomme, unter denen die Münzen aneinandergelegt sind. Die Verabredung zwischen A und B geht einfach dahin, daß die Kehrseite einer Münze immer eine Null, die Bildseite dagegen die verschiedenen Potenzen von 2 und zwar von links anfangend successive 1, 2, 4, 8, ... bedeuten soll. B stellt die gedachte Zahl dann einfach als Summe von Potenzen der 2 dar; also wenn er dem A z. B. die Zahl 22 ($= 16 + 4 + 2$) bezeichnen will, legt er die erste Münze links umgekehrt, die zweite mit Bild nach oben (2), die dritte mit Bild (4), die vierte umgekehrt und die fünfte mit Bild (16).

II. Ein Bild, das jemand sich gedacht hat, zu erraten.

Stellen wir die Zahlen 1—31 als Summen von Potenzen der 2 dar, so kommt jede dieser Potenzen hierbei gleich oft, nämlich 16mal, vor, wie die Tabelle auf nächster Seite zeigt, in der in Spalte I diejenigen Zahlen stehen, welche bei dieser Darstellung der unten stehenden 1 benötigen, in Spalte II diejenigen, bei denen die unten stehende 2 auftritt etc.

V	IV	III	II	I
16	8	4	2	1
17	9	5	3	3
18	10	6	6	5
19	11	7	7	7
20	12	12	10	9
21	13	13	11	11
22	14	14	14	13
23	15	15	15	15
24	24	20	18	17
25	25	21	19	19
26	26	22	22	21
27	27	23	28	23
28	28	28	26	25
29	29	29	27	27
30	30	30	30	29
31	31	31	31	31
16	8	4	2	1

An Stelle dieser Zahlen mögen nun 31 verschiedene Bilder in der Reihenfolge der Zahlen auf einer Karte verzeichnet sein und dazu noch ein 32stes¹⁾, außerdem mögen noch 5 kleinere Karten, entsprechend den 5 Spalten der obigen Tabelle, jede 16 der 32 Bilder aufweisen und zwar gerade diejenigen, deren Platzzahlen in der betreffenden Spalte vorkommen, also Karte I Bild 1, 3, 5, 7 . . . etc. Alsdann ist unser Spiel fertig. Es denkt sich jemand nun ein Bild der großen Karte und wird dann gefragt, auf welcher der fünf kleinen Karten es vorkommt, wonach sich dann ohne jede Schwierigkeit die Platznummer und damit das gedachte Bild bestimmen läßt. Kommt dasselbe z. B. auf den Karten I, III und IV vor, so hat es auf der großen Karte die Platznummer $1 + 4 + 8 = 13$. Kommt es auf keiner der 5 Karten vor, so ist es das 32ste.

1) Bei den im Handel vorkommenden Spielen dieser Art ist dieses 32ste gewöhnlich hinzugefügt, um die Bilder in 4 Reihen à 8 anordnen zu können.

III. Der Lucas'sche Turm („Turm von Hanoi“).

Dieses von Lucas¹⁾ unter dem Pseudonym eines Mandarinen Claus erfundene Spiel besteht aus einem Brett mit 3 Pföcken; auf einem der Pföcke befindet sich eine Anzahl in der Mitte durchbohrter Scheiben pyramidenartig über einander, wie Fig. 1 es zeigt. Das Spiel besteht darin, die

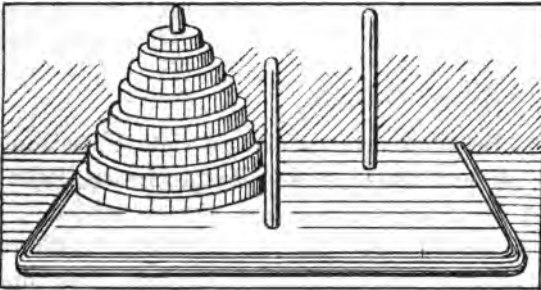


Fig. 1.

Scheiben alle auf einen der beiden anderen Pföcke zu bringen, wenn man z. Z. immer nur eine Scheibe umsetzen und stets bei allen Umsetzungen nur die kleinere Scheibe auf die gröfsere, niemals umgekehrt, setzen darf.

Man erkennt, dafs die Anzahl der erforderlichen Umsetzungen mit der Zahl der vorhandenen Scheiben wächst. Ist die Aufgabe für 8 Scheiben etwa zu lösen, so müssen, damit die unterste Scheibe auf einen anderen Pflock gesetzt werden kann, zunächst die oberen 7 Scheiben alle auf einen zweiten Pflock gebracht, mithin die Aufgabe erst für 7 Scheiben gelöst werden. Darauf kann dann die unterste Scheibe auf den dritten Pflock gebracht werden und nun die anderen 7 successive darüber, was wieder ebensoviele Umsetzungen erfordert, als wenn die Aufgabe für 7 Scheiben vollständig zu lösen wäre. Man sieht, dafs, wenn die Zahl der Scheiben

1) s. Lucas, *Récréat.* III, p. 59 und *Cosmos* t. XV, 1890, p. 157.

um 1 wächst, die Zahl der erforderlichen Umsetzungen auf das Doppelte plus eins steigt. Da nun für 1 Scheibe natürlich 1 Umsetzung erforderlich ist, so ergeben sich leicht folgende Zahlen:

Scheiben	Umsetzungen
1	1
2	3
3	7
4	15
5	31
6	63
7	127
n	$2^n - 1$.

Bei 64 Scheiben würden also so viele Umsetzungen nötig sein, wie in dem oben (S. 28) besprochenen Falle Weizenkörner auf das Schachbrett gelegt werden sollten.

Als praktische Regel für die wirkliche Ausführung eines solchen Manövers mag angeführt werden, daß die kleinste Scheibe die 3 Pflöcke stets in demselben Drehungssinne wechselt.

IV. Der Baguenaudier.

Hoc instrumento ludus excogitatus mirae subtilitatis.
CARDAN, De subtilitate liber XV.

Plurimae speculationes Mathematicae ad rem Quaesturariam non spectant, sed sua se Subtilitate commendant.
WALLIS, Opera math. 1693. II, p. 472.

Das im folgenden behandelte Spiel tritt, wenn seine Erfindung auch wohl schon sehr alt ist, in der Litteratur zuerst bei Cardan¹⁾ auf, es begegnet uns dann wieder in der „Algebra“ des berühmten englischen Mathematikers Wallis²⁾ und in einer Figur, wenn auch ohne erläuternden Text, bei Ozanam³⁾, während in neuerer Zeit Herr Gros, Gerichtsrat in Lyon, eine Brochure über das Spiel herausgegeben hat, in der er eine

1) De subtilitate liber XV (De inutilibus subtilitatibus). Basel 1553. p. 932.

2) Opera mathem. Oxoniae 1693. II, chap. 111, p. 472—478. „De complicatis annulis.“

3) Récréat. mathém. et phys. Paris 1750. t. IV, Fig. 47.

erschöpfende mathematische Theorie desselben entwickelt.¹⁾ Ein deutscher Name scheint für das Spiel nicht zu existieren, dasselbe überhaupt in Deutschland ziemlich unbekannt zu sein²⁾; in Frankreich nennt man es *Baguenaudier*.³⁾ Übrigens legte Cardan unserem Spielzeug auch eine praktische Bedeutung bei, da es zu Schlössern von Geldkisten verwandt werden könne, und in der That wird es nach einer Erzählung des früheren norwegischen Gesandten in Paris, Dr. J. Broch, noch jetzt von Landbewohnern in Norwegen zum Verschliessen ihrer Koffer und Truhen gebraucht.⁴⁾

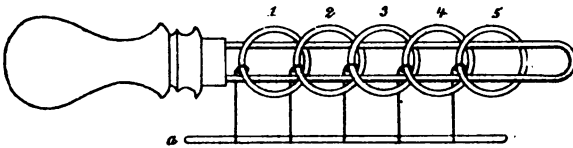


Fig. 2.

Fig. 2 zeigt uns eine an einem Griff angebrachte Spange, auf der 5 gleich große Ringe aus Metall sitzen; jeder derselben ist durch einen an ihm befestigten Faden, welcher durch das Innere des nächsten Ringes und zwischen den beiden Bügeln der Spange hindurchgeht, mit einer kleinen Stange *a* fest verbunden. Die Ringe seien im folgenden stets, wie in Fig. 2, als „erster“, „zweiter“ etc. unterschieden und die bei

1) „Théorie du baguenodier“ par un clerc de notaire Lyonnais. Lyon 1872, Verlag v. Aimé Vingtrinier.

2) Ich habe dasselbe — abgesehen von einem kürzlich erschienenen Buche, das jedoch nur als eine Übersetzung von Lucas, *Récr. math.* anzusehen ist — in der deutschen Litteratur nur gefunden bei Joh. Nik. Martius, *Gesammelte Schr. üb. natürliche Magie*. Ausgew. und bearb. von J. H. M. von Poppe. Stuttgart 1839. Cap. X, 1. p. 120—29. („Die Zauberkette oder das magische Ringspiel.“)

3) Herr Gros, der die etymologische Erklärung des Namens in den Worten *bague* und *noeud* (*nodus*) findet, schreibt dementsprechend *baguenodier*, während Littré (*Dictionn. de l. langue franç.* 1863) und das *Dictionnaire de l'académie française* 1884 *baguenaudier* vorschreiben.

4) s. Lucas, *Récréat. math.* t. I, p. 165.

dieser Nummerierung frühe als ein anderer Ring kommenden kurz als die „vorangehenden“, im umgekehrten Fall als die „nachfolgenden“ bezeichnet. Das Spiel besteht nun darin, die Spange von dem System der Ringe zu trennen. Der Anfänger versucht die Lösung gewöhnlich in der Weise, daß er, den Griff in die linke Hand nehmend, die Ringe nach rechts bis über das Ende der Spange zieht und nun — irrtümlicherweise — die Ringe über einen der beiden Bügel der Spange wirft, muß dann aber erkennen, daß dies zur Lösung der Aufgabe nicht nur nichts beiträgt, vielmehr nur eine Verwirrung der Fäden herbeiführt. Man erkennt in der That sehr leicht, daß man die einzelnen Ringe zwar nach rechts von der Spange herunter zu ziehen haben wird, daß sie dann jedoch nicht auf die eine Seite der Spange, sondern zwischen den beiden Bügeln der Spange hindurch nach unten geworfen werden müssen, und es entsteht jetzt nur die Frage, in welcher Reihenfolge diese Manipulationen mit den verschiedenen Ringen vorzunehmen sind, um auf die schnellste Art eine Trennung von Spange und Ringen zu erzielen. In der ursprünglichen Stellung (s. Fig. 2) können nur die Ringe 4 und 5 nach unten gelangen — ohne daß einer der betreffenden Fäden über einen Bügel der Spange greift, was natürlich zu vermeiden ist — und zwar 5 in der bereits angegebenen Weise und 4, indem man 4 und 5 nach rechts über die Spange hinausführt und dann 4 zwischen den Bügeln hindurch nach unten wirft, 5 dagegen wieder auf die Spange setzt oder gleichzeitig mit 4 nach unten wirft. Bezeichnen wir nun das Lostrennen eines Ringes von der Spange kurz als das „Senken“ eines Ringes und die umgekehrte Operation als das „Heben“, so erkennt man leicht folgendes:

Ein Ring kann nur dann gehoben resp. gesenkt werden, wenn der folgende Ring oben ist, alle weiteren folgenden Ringe jedoch unten; der letzte Ring kann jederzeit gehoben resp. gesenkt werden.

Hätten wir z. B. die durch das Schema $\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{array}$ angedeutete Stellung — in der die Gerade die Spange und die

kleinen Kreise oberhalb derselben die auf ihr sitzenden Ringe, die unteren Kreise die gesenkten Ringe bedeuten — auf irgend eine Weise herbeigeführt, so würde der Ring 2 jetzt gehoben, der Ring 3 dagegen nicht gesenkt und 4 nicht gehoben werden können.

Hiernach erkennt man, daß es bei unserer Aufgabe vor allem darauf ankommen wird, den Ring 1 zu senken, und daß, nachdem dies geschehen, dieser Ring völlig aus der Betrachtung ausscheidet und dann nur noch der Fall eines Spiels von 4 Ringen vorliegt. Damit aber 1 gesenkt werden kann, muß 2 oben und müssen 3, 4, 5 unten sein. Es ist also vorher 3 zu senken, und dies erfordert, daß 4 oben und 5 unten ist. Hiernach ergibt sich folgende Disposition: Es ist zunächst 5 zu senken, darauf kann dann auch 3 gesenkt werden, und wir er-

halten also die Stellung $\begin{array}{c} 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ \\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ \end{array}$. Um nun auch 4 senken zu können, müssen wir 5 wieder heben und können darauf 4 und 5 gleichzeitig senken, wie schon oben (S. 34) hervor-

gehoben. Wir erhalten so die Stellung $\begin{array}{c} 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ \\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ \end{array}$, welche eben die Vorbedingung für das Senken von 1 ist. Aus ihr resul-

tiert daher $\begin{array}{c} 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ \\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ \end{array}$. Damit scheidet 1 aus der Betrachtung aus, und damit nun 2 gesenkt werden kann, muß zuvor 3 gehoben sein. Dies bedingt aber, daß 4 oben ist, und dies wieder dasselbe für 5. Wir heben daher zunächst 4 und 5, was bei diesen beiden zugleich geschehen kann, erhalten also

$\begin{array}{c} 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ \\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ \end{array}$. Soll 3 gehoben werden, so muß erst wieder 5 gesenkt werden, so daß wir successive die Stellungen $\begin{array}{c} 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ \\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ \end{array}$

und $\begin{array}{c} 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ \\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ \end{array}$ erhalten. Damit nun 2 gesenkt werden kann, muß nicht nur 3 oben, sondern auch 4 und 5 unten sein, und um 4 senken zu können, müssen wir zuvor 5 heben, so daß

wir zunächst die Stellung $\begin{array}{c} 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ \\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ \end{array}$ bekommen. Dies ist aber die Anfangsstellung für ein Spiel mit 4 Ringen, und die wei-

teren Operationen sind genau dieselben, als ob wir nur 4 Ringe überhaupt hätten. Durch die jetzt zunächst erreichbare Zwischen-

stellung $\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{array}$ gelangen wir zu $\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{array}$, womit auch der Ring 2 aus der Betrachtung ausscheidet. Damit nun 3 gesenkt werden kann, muß zuvor 4 gehoben werden, und dies bedingt wieder, daß 5 zuvor resp. gleichzeitig gehoben wird, so daß folgende successive Stellungen notwendig werden:

$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{array}$, $\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{array}$, $\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{array}$. Heben wir nun noch 5 und senken dann 4 und 5 gleichzeitig, so sind die Ringe von der Spange getrennt, wie verlangt war.

Wenn wir den zurückgelegten Weg noch einmal verfolgen, so werden wir finden, daß es 16 Schritte waren, die wir machen mußten, um zum Ziel zu gelangen, wobei ein gleichzeitiges Heben resp. Senken der beiden letzten Ringe als *eine* Operation gezählt ist. Die mathematische Betrachtung wird uns später zeigen, daß dieser Weg auch wirklich der kürzeste ist. Bevor wir jedoch hierauf eingehen, wollen wir schon jetzt die Anzahl der erforderlichen einzelnen Umstellungen für verschiedene Anzahlen von Ringen in nachfolgender Tabelle zusammenstellen:

Anz. d. Ringe	Anz. d. Umstell.
2	1
3	4
4	7
5	16
6	31
7	64
8	127
9	256
10	511
11	1024
12	2047
20	524287

Bei 65 Ringen würde die Minimalzahl der erforderlichen

Umstellungen bereits eine 20-stellige Zahl und gerade um 1 größer sein als die Anzahl der Weizenkörner in dem oben (S. 28) besprochenen Fall. Man sieht übrigens leicht, daß die angenommene Anfangsstellung, bei der alle Ringe oben sind, durchaus noch nicht die ungünstigste für die Trennung der Ringe von der Spange ist; vielmehr würde dies für unseren

Fall von 5 Ringen die Stellung $\overset{1\ 2\ 3\ 4\ 5}{\underset{\circ}{\circ}\ \underset{\circ}{\circ}\ \underset{\circ}{\circ}\ \underset{\circ}{\circ}\ \underset{\circ}{\circ}}$ sein, wo zunächst die 4 letzten Ringe zu heben wären, was natürlich ebensoviele Umstellungen erfordert, als wären dieselben ursprünglich oben und erst zu senken, also 7 nach unserer Tabelle; dazu kämen noch die oben angegebenen 16 Umstellungen, zusammen wären es also 23.

Zum Zweck einer mathematischen Begründung unseres Spiels charakterisieren wir die Stellung jedes Ringes durch eine der Ziffern 0 oder 1, so zwar, daß der erste Ring eine 1 erhält, wenn er oben, und eine 0, wenn er unten ist, und jeder folgende, wenn er unten ist, die Zahl des vorhergehenden, dagegen die entgegengesetzte Zahl, wenn er oben ist. Die sich so im ganzen ergebende Zahl, geschrieben mit den Ziffern 0 und 1, wollen wir als eine Zahl des dyadischen Systems

(vgl. oben S. 27) ansehen. So ist z. B. die Stellung $\overset{1\ 2\ 3\ 4\ 5}{\underset{\circ}{\circ}\ \underset{\circ}{\circ}\ \underset{\circ}{\circ}\ \underset{\circ}{\circ}\ \underset{\circ}{\circ}}$ durch die Zahl 11001 völlig charakterisiert (der erste Ring erhält 1, weil er oben ist; der zweite erhält die 1 des vorhergehenden, weil er unten ist; der dritte, oben befindliche, bekommt im Gegensatz zum vorhergehenden 0, während der vierte wieder die Zahl des vorhergehenden erhält; bei dem letzten tritt schließlicly wieder ein Wechsel ein). Wir sahen nun oben, daß alle Umstellungen darauf hinauskommen, daß ein Ring gehoben oder gesenkt wird, wenn der auf ihn folgende oben ist, alle weiteren folgenden aber unten sind. Nehmen wir zunächst an, ein oben befindlicher Ring könne gesenkt werden; dann muß die Stellung entweder durch

a) ... 01000 ...

oder b) ... 10111 ...

charakterisiert sein, wo sich die unterstrichene Zahl auf den betreffenden Ring bezieht und die Zahlen am Ende alle gleich lauten, während die am Anfang belanglos sind. Nach Ausführung der Umstellung erhalten wir offenbar eine Stellung, welche durch die Zahl

$$\begin{aligned} \bar{a}) & \dots 00\underline{111} \dots \\ \text{bzw. } \bar{b}) & \dots 11\underline{000} \dots \end{aligned}$$

charakterisiert ist. Sehen wir uns die letzteren dyadischen Zahlen im Vergleich zu den vorherigen an, so sehen wir, daß das mathematische Äquivalent unserer Umstellung eine Subtraction resp. Addition von 1 ist, da die Zahl \bar{a} offenbar um 1 kleiner ist als a und \bar{b} um 1 größer als b . Kann dagegen ein Ring gehoben werden, so ist die betreffende Stellung offenbar durch das obige \bar{a} oder \bar{b} charakterisiert und die durch Ausführung der Umstellung sich ergebenden Stellungen durch a resp. b . Wir sehen also, daß das Heben, wie Senken eines Ringes bei unserer mathematischen Bezeichnungsweise einer Addition oder Subtraction von je 1 entspricht. Die beiden letzten Ringe nahmen nun aber insofern eine Ausnahmestellung ein, als wir sie beide gleichzeitig heben und senken konnten. Dies bedeutet offenbar: Wir können von einer Zahl, deren letzte Ziffern 101 resp. 010 sind (wenn nämlich die beiden letzten Ringe oben sind), direkt zu einer Zahl, deren letzte Ziffern 111 resp. 000 sind, übergehen, was natürlich einer Addition resp. Subtraction von je 2 ($= 10$ im dyadischen System) gleichkommt, oder aber (wenn die beiden letzten Ringe unten sind) von einer auf 000 resp. 111 ausgehenden Zahl direkt zu einer auf 010 resp. 101 ausgehenden übergehen, was wieder einer Addition resp. Subtraction von je 2 gleichkommt.

Wir sehen also, daß alle nur ausführbaren Umstellungen hinauskommen auf Additionen und Subtractionen von 1 resp. in besonderen Fällen von 2. Es folgt weiter, daß jede einer Addition resp. Subtraction von 1 entsprechende Operation stets ausführbar ist, da jede Zahl zu einem der Typen a, b oder auch

\bar{a} , \bar{b} (S. 37, 38) gehören mufs. Da nun die erstrebte Schlufsstellung durch lauter Nullen .. 000 ... charakterisiert ist, die Anfangsstellung dagegen durch 10101 ..., so wird es offenbar darauf ankommen, diese Zahl durch Additionen und Subtractionen von je 1 in jene überzuführen, und zwar sieht man sofort, dafs nur Subtractionen zulässig sind, wofern man den kürzesten Weg gehen will, da jede Addition eine vorhergehende Subtraction wieder aufheben würde. Wir haben damit für den einzuschlagenden Weg eine Ableitung gewonnen, die einfach darin besteht, dafs wir die durch successive Subtractionen von je 1 (resp. von 2 in dem besonderen Falle) aus den ursprünglichen sich ergebenden Stellungen herbeizuführen suchen, also bei 5 Ringen nach einander 10101, 10100, 10011 etc. Vergleichen wir dies Verfahren mit dem oben angegebenen, so finden wir, dafs beide sich decken, womit dann auch der oben versprochene Beweis dafür geliefert ist, dafs jener Weg wirklich der kürzeste war.

Um umgekehrt die von der Spange losgetrennten Ringe wieder auf dieselbe zu bringen, sind die den successiven Additionen von je 1 (resp. 2) entsprechenden Umstellungen (Anfangsstellung ist 0000 ...) auszuführen, wobei sich natürlich dieselbe Gesamtzahl von Umstellungen ergibt wie bei dem ersten Verfahren.

Die erforderliche Anzahl von Umstellungen, um von 1010 ... zu 0000 ... zu gelangen, ergibt sich leicht folgendermassen: Als „Übergänge von beschleunigtem Tempo“, nämlich einer Subtraction von je 2 entsprechend, hatten sich oben ergeben:

I	II
... 010	... 111
... 000	... 101.

Es fallen also fort die auf 001 und 110 ausgehenden Stellungen. Ist nun die Anzahl n der Ringe

1) gerade = $2k$, so hat die Zahl 1010 ... 10 den Wert $\frac{2^{2k+1} - 2}{3}$; so viele Umstellungen würden also erforderlich sein, wenn nur Subtractionen von je 1 ausgeführt würden, oder was

dasselbe ist, wenn wir einen Übergang von beschleunigtem Tempo als gleichbedeutend mit 2 Umstellungen ansähen. Rechnen wir einen solchen jedoch nur als *eine* Umstellung, so sind alle auf 001 und 110 ausgehenden Zahlen, welche zwischen 1010 ... 10 und 0000 ... liegen, in Abzug zu bringen.

Von der ersteren Art giebt es nun $\frac{2^{2k-2}-1}{3} + 1$ und von der letzteren eine weniger, also $\frac{2^{2k-2}-1}{3}$, zusammen also $\frac{2^{2k-1}+1}{3}$, so daß also unser Spiel $2^{2k-1} - 1$ Umstellungen erfordert.

Ist 2) n ungerade $= 2k + 1$, so hat die Zahl 1010 ... 1 den Wert $\frac{2^{2k+2}-1}{3}$, und zu überspringen sind mit der Endung 001: $\frac{2^{2k-1}-2}{3} + 1$ Zahlen und mit der Endung 110 wieder eine weniger, so daß hier 2^{2k} Umstellungen verbleiben.

Zusammenfassend erhalten wir also:

Anzahl der Ringe	Anzahl d. Umstell.
$n = 2k$	$2^{2k-1} - 1$
$n = 2k + 1$	2^{2k}

Für das umgekehrte Verfahren gilt natürlich genau dasselbe. Nach diesen Formeln sind die Zahlen der Tabelle auf S. 36 berechnet.

§ 4. Das Bachet'sche Gewichtsproblem.

Die Gewichtssätze unserer gleicharmigen Wagen bestehen gewöhnlich aus folgenden Stücken:

1 g, 2 g, 2 g, 5 g, 10 g, 20 g, 20 g, 50 g.

und setzen sich nach diesem Prinzip eventuell nach beiden Seiten hin fort. Wir stellen nun mit Bachet¹⁾ die Frage, ob sich dieselben Wägungen, wie mit diesen Gewichten, noch mit einer geringeren Anzahl von Gewichten ausführen ließen resp. wie viele Gewichte mindestens und welche hierzu erforderlich sind.

1) l. c. p. 154 (p. 215 der 2. Aufl.).

Der obige Gewichtssatz liefert jedenfalls alle Gewichte zwischen 1 g. und 100 g., von g. zu g. Nach unseren früheren Darlegungen (s. § 2, S. 27) erhalten wir diese aber auch durch folgende Gewichte:

$$1 \text{ g.}, 2 \text{ g.}, 4 \text{ g.}, 8 \text{ g.}, 16 \text{ g.}, 32 \text{ g.}, 64 \text{ g.}$$

Dies sind nur 7 Stücke gegenüber 8 oben, und wir können mit ihnen sogar noch weiter, nämlich bis 127 g., abwägen.

Führt man die Wägungen jedoch in der Weise aus, daß man event. auf die zweite Schale ein Gegengewicht legt, so genügen bereits 5 Gewichte völlig für den angegebenen Spielraum, nämlich:

$$1 \text{ g.}, 3 \text{ g.}, 9 \text{ g.}, 27 \text{ g.}, 81 \text{ g.},$$

$$\text{indem } 2 = 3 - 1$$

$$4 = 3 + 1$$

$$5 = 9 - (3 + 1)$$

$$6 = 9 - 3$$

$$7 = 9 - (3 - 1)$$

$$8 = 9 - 1 \text{ etc. ist.}$$

Es entsteht dabei nun die Frage: Wie viele verschiedene Wägungen lassen sich höchstens mit r Gewichten ausführen? — Betragen die einzelnen Gewichtsstücke bzw. $a_1, a_2 \dots a_r$ g., so können wir die Wägung aller solcher Gewichte ausführen, deren Maßzahlen sich als algebraische Summen von $a_1, a_2 \dots a_r$ ergeben, zunächst also $a_1, a_2 \dots a_r$ selbst, sodann die durch Kombinationen von je 2 entstehenden, also $a_1 + a_2, a_1 - a_2$ etc., dann die aus je 3, nämlich $a_1 + a_2 + a_3, a_1 + a_2 - a_3, a_1 - a_2 + a_3, a_1 - a_2 - a_3$ etc., wo eventuell bei negativem Wert alle Glieder des betreffenden Aggregats mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen sind. Im Maximum, d. h. wenn alle so erhaltenen Zahlen verschieden sind, erhält man so

$$r + 2 \binom{r}{2} + 2^2 \binom{r}{3} + 2^3 \binom{r}{4} + \dots + 2^{r-1} \binom{r}{r} = \frac{3^r - 1}{2}.$$

(Bezeichnet man die links stehende Summe kurz mit x , so sieht man leicht, daß $1 + 2x = (1 + 2)^r = 3^r$ ist).

Eine obere Grenze für die Anzahl der verschiedenen Wägungen ist also $\frac{3^r - 1}{2}$. Wir fragen uns nun weiter: Lassen sich die r Gewichte so auswählen, daß diese $\frac{3^r - 1}{2}$ Wägungen thatsächlich alle verschieden und ihre Maßzahlen die Zahlen der natürlichen Zahlenreihe sind? — Jedenfalls müssen dann die $a_1, a_2 \dots a_r$ alle verschieden sein, und wir dürfen annehmen: $a_1 < a_2 < a_3 \dots < a_r$. Die größte daraus zu komponierende Zahl ist $\sum_1^r a_i$, dann folgt $\sum_2^r a_i$, hierauf $\sum_2^r a_i - a_1$, und da diese 3 aufeinanderfolgen sollen in der Zahlenreihe, so muß offenbar $a_1 = 1$ sein. Auf $\sum_2^r a_i - a_1$ folgt dann $\sum_3^r a_i + a_1$, und zwar soll diese Zahl um 3 kleiner sein als die größte $\sum_1^r a_i$, so daß folgt: $a_2 = 3$. — Wir nehmen nun an, es sei bereits gezeigt: $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 9 \dots a_\varrho = 3^{\varrho-1}$, wobei wir bemerken, daß für $\varrho = 2$ dieser Nachweis ja soeben geführt ist. Aus diesen $a_1, a_2 \dots a_\varrho$ lassen sich dann alle Zahlen von 1 bis $\frac{3^\varrho - 1}{2}$ im Sinne unseres Problems darstellen.

Daß nämlich die aus den so bestimmten $a_1 \dots a_\varrho$ hergestellten algebraischen Summen auch wirklich lauter verschiedene Zahlen liefern, sieht man leicht. Wären 2 derselben nämlich einander gleich, so würde hieraus eine Gleichung von der Form $\sum k_i 3^i = 0$ folgen, wo die k_i die Werte 0, $\pm 1, \pm 2$ hätten. Dann müßte aber $k_0 = 0$ sein, weil außer dem ersten jedes Glied der Summe durch 3 teilbar ist; hiernach aber offenbar auch k_1 , da alle anderen Glieder durch 3^2 teilbar sind u. s. w., womit die Unmöglichkeit einer solchen Gleichung und damit die eindeutige Darstellung der Zahlen $1, 2 \dots \frac{3^\varrho - 1}{2}$ durch $a_1, a_2 \dots a_\varrho$ dargethan ist. — Man erhält nun aus $a_1, a_2 \dots a_r$ nächst der größtmöglichen Zahl $\sum_1^r a_i$ die Reihe der darauf folgenden kleineren natür-

lichen Zahlen, indem man stets $a_r + a_{r-1} + \dots + a_{q+1}$ bildet und nun hiervon successive $1, 2 \dots \frac{3^q - 1}{2}$ abzieht, welche Subtrahenden sich ja allein durch $a_1 \dots a_q$, und zwar das letzte

in der Form $\sum_1^q a_i$, darstellen lassen. Man erhält so — mit positiven $a_r, a_{r-1} \dots a_{q+1}$ — eine lückenlose Reihe der größten überhaupt erreichbaren Zahlen; unter ihnen die kleinste ist offenbar $a_r + \dots + a_{q+1} - a_q - a_{q-1} \dots - a_1$. Um dann die nächst kleinere zu erhalten, muß man offenbar bilden:

$$a_r + \dots + a_{q+2} - a_{q+1} + a_q + a_{q-1} + \dots + a_1.$$

Soll diese Zahl um 1 kleiner als die vorige sein, so muß aber

$$\begin{aligned} a_{q+1} &= 2(a_q + a_{q-1} + \dots + a_1) + 1 \\ &= 2 \cdot \frac{3^q - 1}{2} + 1 = 3^q \text{ sein.} \end{aligned}$$

Damit ist aber allgemein gezeigt, daß die Zahlen $a_1, a_2 \dots a_r$ unserer Bedingung nur dann gerecht werden können, wenn sie die Reihe der Potenzen der 3 sind.¹⁾

Das so gewonnene Resultat sprechen wir folgendermaßen aus:

Sollen die Gewichte eines Gewichtssatzes so gewählt werden, daß mit denselben möglichst viele verschiedene Wägungen —

1) Eine eigentlich mathematische Behandlung erfuhr unser Problem zuerst durch eine in Gergonne's Annales de mathém. VIII, 1817/18, p. 164 gestellte diesbezügliche Frage. Die darauf von Coste, Durrande und einem Anonymus eingegangenen und von der Redaktion zu einem zusammenhängenden Artikel verarbeiteten Antworten erledigen das Problem insofern nicht, als sie von vorneherein von der Annahme einer Potenzreihe ausgehen. Die von uns oben gegebene Darstellung nimmt Anlehnung an Clausen, „Über eine arithmetische Aufgabe“. Crelle's Journal VII, 1831, p. 30—31 und besonders Schlegel „Die allgemeinen Grundlagen zweier Probleme aus der Unterhaltungs-Arithmetik“ Hoppe's Archiv XI, p. 93—100, jedoch ist bei Herrn Schlegel die Fragestellung die umgekehrte, indem derselbe mit Bachet von den darzustellenden Gewichten 1, 2 ... 40 ausgeht und die Frage nach der Minimalzahl der hierfür erforderlichen Stücke stellt.

bei 1 g. beginnend und von g. zu g. fortschreitend — unter Benutzung beider Schalen für die Gewichte ausgeführt werden können, so müssen die Gewichte unter einander alle verschieden sein und ihre Maßzahlen die Reihe der Potenzen von 3, von der nullten ab gerechnet, bilden.

Formuliert man die Aufgabe so, daß alle Wägungen eines gewissen Intervalls, etwa zwischen 1 und 100, mit einer Minimalzahl von Gewichten ausgeführt werden sollen, so erhält man neben der selbstverständlich auch dann noch bestehenden Lösung 1, 3, 9, 27, 81 noch zahlreiche andere, z. B. 1, 3, 7, 23, 69, überhaupt jede Reihe von 5 Zahlen $a_1, a_2 \dots a_5$, welche den folgenden Bedingungen genügt:

$$1) a_1 = 1; \quad 2) a_{i+1} \leq 2 \sum_{k=1}^i a_k + 1; \quad 3) \sum_{k=1}^5 a_k \geq 100,$$

$i = 1, 2, 3, 4$

wobei jedoch auch diese Bedingungen nur hinreichend, nicht notwendig sind, wie z. B. die der ersten Bedingung nicht genügende Lösung 2, 3, 9, 27, 81 zeigt. Allerdings ist unter allen den vielen Lösungen die nach Potenzen von 3 fortschreitende insofern ausgezeichnet, als erstens sie nur allein für alle Zahlen des Intervalls lückenlos noch genügt, wenn dieses über 100 hinaus bis 121 incl. erweitert wird¹⁾, und zweitens dadurch, daß bei ihr allein jede Wägung von 1 g. bis zur Summe aller Gewichte auf eine und nur eine Art ausführbar ist. Wie man aus den obigen Ausführungen (S. 42, 43) schon ersehen hat, besteht nämlich folgender Satz:

Die Reihe 1, 3, 3² . . . 3ⁱ ist die einzige Reihe unter einander verschiedener ganzer Zahlen von der Eigenschaft, daß sich jede ganze Zahl in dem Intervall von 1 bis zur Summe der Zahlen der Reihe²⁾ auf eine und nur eine Art durch die

1) Bachet und nach ihm Herr Schlegel (vgl. Anm. 1, S. 43) setzen als obere Grenze des Intervalls eine Zahl von der Form $\frac{3^n - 1}{2}$ fest und erhalten nur aus diesem Grunde eine einzige Lösung.

2) Diese Restriction eines begrenzten Intervalls fehlt bei A Schwidtal,

Zahlen der Reihe, dieselben mit den Koeffizienten 0, ± 1 genommen, darstellen läßt.

Der Beweis hierfür ergibt sich sofort folgendermaßen: Es sei $a_1, a_2 \dots a_r$ eine Reihe der verlangten Art und $a_1 < a_2 < \dots < a_r$. In derselben Weise wie oben S. 42 folgt alsdann, daß $a_1 = 1, a_2 = 3$ sein muß, und hieraus wieder in genau derselben Weise wie dort, daß allgemein $a_i = 3^{i-1}$.

Folgende allgemeinere Frage ist von Herrn Mac Mahon aufgestellt und beantwortet worden¹⁾:

Auf wie viele Arten läßt sich eine ganze Zahl u als Summe von unter einander gleichen oder verschiedenen Zahlen so darstellen, daß sich zugleich jede kleinere Zahl als u auf eine und nur eine Art als Summe durch diese Zahlen darstellen läßt („Perfekte Zerlegungen“); wie viele Zerlegungen sind möglich, wenn die Darstellungen nicht nur durch reine, sondern auch durch algebraische Summen geschehen dürfen („Subperfekte Zerlegungen“)?

Nehmen wir an, eine „perfekte“ Zerlegung der Zahl u sei möglich durch l Zahlen λ , m Zahlen μ , n Zahlen ν etc., d. h. also

$$u = \underbrace{\lambda + \lambda + \dots + \lambda}_l + \underbrace{\mu + \mu + \dots + \mu}_m + \underbrace{\nu + \nu + \dots + \nu}_n + \dots$$

so muß offenbar, da ja auch jede kleinere Zahl nur auf eine Art darstellbar sein soll, die Summe

$$k_l \cdot \lambda + k_m \cdot \mu + k_n \cdot \nu \dots; \quad k_l = 0, 1, 2 \dots l; \quad k_m = 0, 1, 2 \dots m \text{ etc.}$$

alle Zahlen von 0 bis u und jede nur einmal liefern.

Eine einfache Anzahlbestimmung liefert alsdann die Relation

$$(1) \quad u + 1 = (l + 1)(m + 1)(n + 1) \dots$$

Es sei nun $\lambda > \mu > \nu > \dots$. Die Zahl $l \cdot \lambda$ stellt sich der Eindeutigkeit wegen nur in der Form $\underbrace{\lambda + \lambda + \dots + \lambda}_l$ dar. Die Darstellung der

Zahlen $1, 2 \dots \lambda - 1$ muß jedoch noch ohne eine der Zahlen λ möglich sein, dagegen darf sich λ nicht durch die übrigen Zahlen $\mu, \nu \dots$ darstellen lassen. Es ist daher keinesfalls möglich, die Zahl $l\lambda + \lambda$

„Die Darstellung aller Zahlen durch die Zahl 3^i “. Beil. z. Progr. d. Gymn. zu Königshütte 1890, p. 13. In der dort angegebenen Form ist der Satz daher falsch, wie die unendliche Reihe $2, 3, 3^2, 3^3 \dots$ zeigt, welche für jede ganze Zahl eine und nur eine Darstellung in dem oben angegebenen Sinne ermöglicht.

1) Certain special partitions of numbers. Quart. Journ. of mathem. XXI, 1886, p. 367—373.

noch darzustellen, da dies nur möglich wäre, wenn für λ aufser der Darstellung $\lambda = \lambda$ noch eine zweite existierte; die größte noch darstellbare Zahl darf also höchstens $= l\lambda + \lambda - 1$ sein, andererseits muß aber diese Zahl stets noch darstellbar sein, da $l\lambda$ sich durch die l allein und die Zahler $1, 2 \dots \lambda - 1$ sich ohne die λ darstellen, d. h. also $u = l\lambda + \lambda - 1$ oder

$$(2) \quad u + 1 = (l + 1)\lambda, \text{ also wegen (1)}$$

$$(1') \quad \lambda = (m + 1)(n + 1) \dots$$

Da nun die Zahlen $1; 2 \dots \lambda - 1$ sich eindeutig durch die m Zahlen μ , die n Zahlen ν etc. darstellen lassen müssen, so folgt wegen (1') offenbar ganz analog:

$$(2') \quad \lambda = (m + 1)\mu \text{ u. s. w.}$$

Zusammenfassend haben wir also folgende Relationen für perfekte Zerlegungen:

$$\begin{aligned} u &= l\lambda + m\mu + n\nu + \dots \\ u + 1 &= (l + 1)\lambda \\ \lambda &= (m + 1)\mu \\ \mu &= (n + 1)\nu \\ \nu &= (r + 1)\rho \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned}$$

wonach sich die Bestimmung der verschiedenen Zerlegungen stets sehr leicht ausführen läßt.

Ist u z. B. $= 23$, also $u + 1 = 24$, so erhalten wir folgende Zerlegungen:

I. $\lambda = 12, l = 1.$

a) $\mu = 6, m = 1.$

1) $\nu = 3, n = 1; \rho = 1, r = 2.$

2) $\nu = 2, n = 2; \rho = 1, r = 1.$

3) $\nu = 1, n = 5.$

b) $\mu = 4, m = 2.$

1) $\nu = 2, n = 1; \rho = 1, r = 1.$

2) $\nu = 1, n = 3.$

c) $\mu = 3, m = 3; \nu = 1, n = 2.$

d) $\mu = 2, m = 5; \nu = 1, n = 1.$

e) $\mu = 1, m = 11.$

II. $\lambda = 8, l = 2.$

a) $\mu = 4, m = 1.$

1) $\nu = 2, n = 1; \rho = 1, r = 1.$

2) $\nu = 1, n = 3.$

b) $\mu = 2, m = 3; \nu = 1, n = 1.$

c) $\mu = 1, m = 7.$

III. $\lambda = 6, l = 3.$

- a) $\mu = 3, m = 1; \nu = 1, n = 2$
- b) $\mu = 2, m = 2; \nu = 1, n = 1.$
- c) $\mu = 1, m = 5.$

IV. $\lambda = 4, l = 5.$

- a) $\mu = 2, m = 1; \nu = 1, n = 1.$
- b) $\mu = 1, m = 3.$

V. $\lambda = 3, l = 7; \mu = 1, m = 2.$

VI. $\lambda = 2, l = 11; \mu = 1, m = 1.$

VII. $\lambda = 1, l = 23.$

Schreiben wir die Zerlegung von u kurz in der Form $l \cdot \lambda + m \cdot \mu + n \cdot \nu + \dots$, so haben wir also für 23 folgende 20 perfekte Zerlegungen erhalten:

1) $1 \cdot 12 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1$	11) $2 \cdot 8 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1$
2) $1 \cdot 12 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1$	12) $2 \cdot 8 + 7 \cdot 1$
3) $1 \cdot 12 + 1 \cdot 6 + 5 \cdot 1$	13) $3 \cdot 6 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1$
4) $1 \cdot 12 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1$	14) $3 \cdot 6 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1$
5) $1 \cdot 12 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 1$	15) $3 \cdot 6 + 5 \cdot 1$
6) $1 \cdot 12 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 1$	16) $5 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1$
7) $1 \cdot 12 + 5 \cdot 2 + 1 \cdot 1$	17) $5 \cdot 4 + 3 \cdot 1$
8) $1 \cdot 12 + 11 \cdot 1$	18) $7 \cdot 3 + 2 \cdot 1$
9) $2 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1$	19) $11 \cdot 2 + 1 \cdot 1$
10) $2 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 1$	20) $23 \cdot 1.$

Betrachten wir nun die subperfekten Zerlegungen und ist $u = l \cdot \lambda + m \cdot \mu + n \cdot \nu + \dots; \lambda > \mu > \nu > \dots$ jetzt eine solche, so liefert die Summe

$$k_l \cdot \lambda + k_m \cdot \mu + k_n \cdot \nu + \dots; \quad k_l = -l, -l + 1 \dots -1, 0, +1 \dots l$$

$$k_m = -m, -m + 1 \dots -1, 0, +1 \dots m$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

offenbar alle Zahlen von $-u$ bis $+u$ und zwar jede gerade einmal. Es mu\ss also

(1) $2u + 1 = (2l + 1)(2m + 1)(2n + 1) \dots$ sein.

Denken wir uns nun zu allen Darstellungen der Zahlen $1 \dots u$ durch die algebraischen Summen die Gleichung $u = l \cdot \lambda + m \cdot \mu + n \cdot \nu \dots$ addiert, so erhalten wir offenbar eine Darstellung der Zahlen $u + 1, u + 2 \dots 2u$ durch reine Summen aus $2l$ Zahlen $\lambda, 2m$ Zahlen μ etc. und zwar für jede dieser Zahlen gerade eine solche Darstellung.

Es folgt nun ganz entsprechend wie oben, da\ss

$$2u \leq 2l\lambda + (\lambda - 1), \text{ also } 2u + 1 \leq (2l + 1)\lambda$$

sein mu\ss, da sonst, wenn die Zahl $2l\lambda + \lambda$ noch darstellbar wäre,

sich λ durch die $\mu, \nu \dots$, also auf eine zweite Art darstellen lassen müßte. Ferner muß $2m\mu + 2n\nu + \dots \geq \frac{\lambda-1}{2}$ sein. Denn wenn $m\mu + n\nu + \dots < \frac{\lambda-1}{2}$ wäre, so könnte man mit den $\mu, \nu \dots$ ohne die λ höchstens die Zahlen $1, 2 \dots \left[\frac{\lambda-2}{2} \right]$ darstellen, wo durch die eckige Klammer in üblicher Weise angedeutet werden soll, daß bei gebrochenem Wert die nächst kleinere ganze Zahl zu nehmen ist; die nächst größere darstellbare Zahl wäre dann $\lambda - (m\mu + n\nu + \dots) > \frac{\lambda+1}{2}$; es würde also dazwischen mindestens eine Zahl, $\left[\frac{\lambda+1}{2} \right]$, ausfallen, und wir müssen

daher annehmen: $2m\mu + 2n\nu + \dots \geq \lambda - 1$, also

$$2l\lambda + 2m\mu + 2n\nu + \dots \geq (2l+1)\lambda - 1$$

oder

$$2u + 1 \geq (2l+1)\lambda,$$

d. h. aber in Verbindung mit der Ungleichung der vorigen Seite:

$$(II) \quad 2u + 1 = (2l+1)\lambda$$

und daher

$$(I') \quad \lambda = (2m+1)(2n+1) \dots$$

Aus den Gleichungen

$$2u + 1 = (2l+1)\lambda$$

und

$$u = l\lambda + m\mu + n\nu + \dots$$

folgt nun:

$$2m\mu + 2n\nu \dots = \lambda - 1$$

oder

$$m\mu + n\nu \dots = \frac{\lambda-1}{2},$$

und man ersieht hieraus, daß die Zahlen $1, 2 \dots \frac{\lambda-1}{2}$ allein durch die $\mu, \nu \dots$ ohne die λ dargestellt werden müssen; denn die größte durch diese Zahlen darstellbare Zahl ist $\frac{\lambda-1}{2}$, so daß ein subtraktives λ nicht mehr hinzugefügt werden kann; aber auch die additive Hinzufügung eines λ würde offenbar stets eine Zahl liefern, die $\geq \frac{\lambda+1}{2}$ ist. Wir dürfen also sagen: Die m Zahlen μ , n Zahlen $\nu \dots$ geben eine subperfekte Zerlegung der Zahl $\frac{\lambda-1}{2}$; zugleich ist $2 \cdot \frac{\lambda-1}{2} + 1 = (2m+1)(2n+1) \dots$, d. h. es müssen bezüglich $\frac{\lambda-1}{2}$ dieselben Bedingungen erfüllt sein, wie zuvor für u . Es folgt daher in ganz analoger Weise:

$$(II') \quad \lambda = (2m+1)\mu$$

und hieraus wieder

$$(II'') \quad \mu = (2n + 1)v \text{ etc.}$$

Auf Grund der Formeln (I), (II), (II'), (II'') etc. ist es nun leicht, alle subperfekten Zerlegungen einer vorgelegten Zahl anzugeben.

Man beachte, daß $\lambda, \mu, \nu \dots$ stets ungerade sind und daß hieraus wegen $u = l \cdot \lambda + m \cdot \mu + n \cdot \nu \dots$ folgt: $u \equiv (l + m + n + \dots) \pmod{2}$. Jede Zahl stellt sich bei diesen subperfekten Zerlegungen also durch lauter ungerade Summanden dar und zwar durch eine gerade oder ungerade Anzahl solcher, je nachdem die Zahl selbst gerade oder ungerade ist.

Als Beispiel betrachten wir den Bachet'schen Fall $u = 40$.

$$2u + 1 = 81.$$

$$I. \lambda = 27, \quad l = 1.$$

$$a) \mu = 9, \quad m = 1.$$

$$1) \nu = 3, \quad n = 1; \quad \rho = 1, \quad r = 1.$$

$$2) \nu = 1, \quad n = 4.$$

$$b) \mu = 3, \quad m = 4; \quad \nu = 1, \quad n = 1$$

$$c) \mu = 1, \quad m = 13.$$

$$II. \lambda = 9, \quad l = 4.$$

$$a) \mu = 3, \quad m = 1; \quad \nu = 1, \quad n = 1.$$

$$b) \mu = 1, \quad m = 4.$$

$$III. \lambda = 3, \quad l = 13; \quad \mu = 1, \quad m = 1.$$

$$IV. \lambda = 1, \quad l = 40.$$

Für die Zahl 40 existieren also folgende 8 subperfekte Zerlegungen:

$$1) 1 \cdot 27 + 1 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1$$

$$2) 1 \cdot 27 + 1 \cdot 9 + 4 \cdot 1$$

$$3) 1 \cdot 27 + 4 \cdot 3 + 1 \cdot 1$$

$$4) 1 \cdot 27 + 13 \cdot 1$$

$$5) 4 \cdot 9 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1$$

$$6) 4 \cdot 9 + 4 \cdot 1$$

$$7) 13 \cdot 3 + 1 \cdot 1$$

$$8) 40 \cdot 1$$

§ 5. Gergonne's Haufenproblem.

Unter den „Problèmes plaisants“ Bachet's¹⁾ findet sich ein Spiel, das den in § 3 unter I und II behandelten sehr nahe steht, nur daß statt der 2 hier die 3 als Grundzahl auftritt. Die Spielregel ist folgende: Man nehme 27 Karten und lasse eine Person sich davon eine denken. Dann nehme man

1) l. c. p. 72, Problème XVIII (p. 143 der 2. Aufl.).

die zu einem Haufen zusammengelegten Karten der Reihe nach von oben nach unten ab, zeige sie, ohne sie selbst anzusehen, der anderen Person und lege sie mit dem Bild nach unten hin und zwar in 3 Haufen, so daß die erste zum ersten, die zweite zum zweiten, die dritte zum dritten, die vierte wieder zum ersten etc. Haufen kommt. Dann frage man die andere Person, in welchen Haufen die gedachte Karte gekommen ist, und lege hierauf die 3 Haufen wieder zu einem zusammen, den ersten zu oberst, dann den zweiten und den dritten zu unterst. Dann ordne man wieder die Karten in 3 Haufen an, frage wieder nach dem Haufen der gedachten Karte und mache schliesslich dasselbe noch ein drittes Mal, worauf man in der Lage ist, die gedachte Karte anzugeben.

Eine allgemeinere mathematische Behandlung dieses Spiels wurde zuerst von Gergonne gegeben¹⁾, nach dem man daher auch das Spiel benannt hat. — Kommt die Karte bei der ersten Anordnung in Haufen in den a -ten, so ist ihre Rangziffer in dem nachher zu bildenden Haufen aller 27 zwischen $(a - 1)9 + 1$ und $a \cdot 9$ gelegen, wenn der Rang von oben ab gerechnet wird. Bei der zweiten Haufenbildung kommen nun von den ersten $(a - 1)9$ Karten je $(a - 1)3$ in jeden der 3 Haufen; dann kommen in jeden der 3 Haufen je 3 Karten, und unter diesen befindet sich die gedachte. In ihrem Haufen liegen also mindestens $(a - 1)3$ und höchstens $(a - 1)3 + 2$ Karten unter ihr, d. h. sie ist, von oben gerechnet, in ihrem Haufen die $[9 - (a - 1)3]$ -te bis $[7 - (a - 1)3]$ -te; liegt sie also jetzt im Haufen b , so ist beim erneuten Zusammenlegen der 3 Haufen ihre Rangziffer, von oben gerechnet, zwischen $(b - 1)9 + 9 - (a - 1)3$ und $(b - 1)9 + 7 - (a - 1)3$ gelegen oder einfacher geschrieben: zwischen $9b - 3a + 3$ und $9b - 3a + 1$. Jetzt kommen in jeden Haufen zu unterst $3b - a$ Karten, unter denen sich die ge-

1) „Recherches sur un tour de cartes.“ Annales de mathématiques rédigées par Gergonne 1813/14, t. IV, p. 276—283.

dachte Karte noch nicht befindet, doch ist sie dann die $[3b - a + 1]$ -te, von unten gerechnet, in einem der Haufen. Von oben gerechnet ist sie also in ihrem Haufen die $[9 - 3b + a]$ -te, und wenn sie im Haufen c jetzt liegt, so wird sie beim Zusammenlegen der 3 Haufen die $[(c - 1)9 + 9 - 3b + a]$ oder $[9c - 3b + a]$ -te Karte überhaupt. Aus den Nummern a, b, c ihrer successiven Haufen ist man demnach leicht in der Lage, sie selbst zu bestimmen; ja sogar ein Blinder könnte, wie Gergonne¹⁾ bemerkt, dies Kunststück ausführen und würde damit jedenfalls allgemeine Verwunderung erregen: *Man braucht nur, wenn sich die Karte der Reihe nach in den Haufen a, b, c befindet, aus dem ganzen Haufen die $(9c - 3b + a)$ -te Karte zu nehmen.*

Gergonne hat dies Problem dahin verallgemeinert, daß m^m Karten in m Haufen von je m^{m-1} angeordnet werden. Kommt eine bestimmte Karte hierbei zunächst in den Haufen n_1 , so liegt ihre Rangziffer beim ersten Zusammenlegen zwischen $(n_1 - 1)m^{m-1} + 1$ und $n_1 \cdot m^{m-1}$. Bei der zweiten Anordnung kommen also zunächst in jeden Haufen $(n_1 - 1)m^{m-2}$ Karten, ohne daß die betr. Karte darunter ist; dagegen ist sie unter den nächsten m^{m-2} Karten eines der m Haufen. Unter ihr liegen in ihrem Haufen also mindestens $(n_1 - 1)m^{m-2}$ und höchstens $n_1 m^{m-2} - 1$ Karten; sie ist also von oben die $[m^{m-1} - n_1 m^{m-2} + 1]$ -bis $[m^{m-1} - (n_1 - 1)m^{m-2}]$ -te Karte. Ist sie nun im Haufen n_2 , so liegt bei nochmaligem Zusammenlegen ihre Rangziffer zwischen $n_2 m^{m-1} - n_1 m^{m-2} + 1$ und $n_2 m^{m-1} - n_1 m^{m-2} + m^{m-2}$. Durch vollständige Induction findet man leicht, daß die Rangziffer der betr. Karte beim letzten, also m -ten Zusammenlegen sich durch folgende Formeln aus den Nummern $n_1, n_2, n_3 \dots$ ihrer successiven Haufen bestimmt:

$$\text{I. } m = 2k; \quad x = n_m m^{m-1} - n_{m-1} m^{m-2} + n_{m-2} m^{m-3} - \dots \\ + n_2 m - n_1 + 1;$$

$$\text{II. } m = 2k + 1; \quad x = n_m m^{m-1} - n_{m-1} m^{m-2} + n_{m-2} m^{m-3} - \dots \\ + n_3 m^2 - n_2 m + n_1.$$

Selbstverständlich kann man es hiernach auch erreichen, eine bestimmte Karte am Schluss an bestimmter Stelle erscheinen zu lassen, indem man bei jedem Zusammenlegen die Haufen in geeigneter Reihenfolge zusammenlegt, oder vielmehr,

1) l. c. p. 283.

indem man dem die betreffende Karte enthaltenden Haufen jedesmal die richtige Stelle anweist, da die Reihenfolge der übrigen Haufen offenbar irrelevant ist.¹⁾ Soll z. B. in dem Fall der 27 Karten die gedachte zum Schluß gerade in der Mitte, also als 14-te liegen, so muß also $9c - 3b + a = 14$, d. h. $a = b = c = 2$ sein. *Es muß also dreimal derjenige Haufen, welcher als der die betreffende Karte enthaltende bezeichnet ist, in die Mitte genommen werden, wenn die gesuchte Karte zum Schluß selbst die mittelste, d. h. 14-te sein soll.*

In dem allgemeinen Fall ergeben sich die n_1, n_2, \dots natürlich auch leicht und eindeutig aus gegebenem x .

Der allgemeine Fall von p Haufen zu je q Karten ist von Hudson²⁾ behandelt worden; eine Berichtigung dieser Untersuchungen hat Herr L. E. Dickson³⁾ gegeben. Übrigens ist der Fall $p = 3, q = 5$ und nicht der von uns behandelte der 27 Karten, der von Bachet untersucht, ohne daß jedoch dort allgemeinere mathematische Gesichtspunkte hervortreten.

1) Diese Form unseres Spiels wurde eingehend behandelt von Guyot, *Récréations physiques et mathématiques* 1769, t. II, p. 300 (*Récréation* 108).

2) *Educ. Times Repr.* 1868, IX, p. 89—91.

3) *Bulletin of the Amer. Mathem. Soc.* 2nd series, vol. I, 1895, p. 184—186.

Kapitel IV.

Umfüllungsaufgaben.

*Répandre dans le public des choses aussi intéressantes,
c'est vulgariser les doctrines de l'Arithmétique et de la
Théorie des Nombres.*

ED. LUCAS (s. Réc. math. t. III, p. 163).

§ 1. Die älteste Form der Aufgabe und ihre Bachet'schen Lösungen.

Bereits im Anfang des 16. Jahrhunderts in den Schriften des italienischen Mathematikers Tartaglia, sowie in Bachet's „Problèmes plaisants et délectables“ findet sich folgende Aufgabe: „2 gute Freunde wollen 8 Liter Wein zu gleichen Teilen unter sich teilen; der Wein befindet sich in einem Achtlitergefäß, außerdem stehen noch ein Fünf- und ein Dreilitergefäß, beide leer, zur Verfügung. Wie läßt sich unter alleiniger Benutzung dieser 3 Gefäße die Teilung ausführen?“¹⁾

Um eine Lösung zu finden, wendet Bachet folgendes Schlussverfahren an²⁾; das wir in möglichster Anlehnung an den Text der Neu-Ausgabe seines Werkes, wie folgt, wiedergeben: „Da es zur Teilung von 8 Litern in 2 gleiche Teile nötig ist, daß man auf der einen Seite 4 und auf der anderen gleichfalls 4 hat und man diese 4 nur in dem zweiten oder in dem ersten³⁾ Gefäß bekommen kann, so muß man ent-

1) In der Bezeichnung „Liter“ wolle man nicht einen Anachronismus erblicken; wir wählen hier, wie auch weiterhin in diesem Kapitel, stets dies jetzt gebräuchlichste Hohlmaß statt der sonst bei dieser Aufgabe gebrauchten Einheiten.

2) 4. Aufl. 1879. p. 139 (p. 206 der 2. Aufl.).

3) Unter dem „ersten“ Gefäß ist das Achtliter-, unter dem „zweiten“ das Fünf- und unter dem „dritten“ das Dreilitergefäß zu verstehen.

weder das eine oder das andere zu erreichen suchen. Hienach ergeben sich 2 verschiedene Wege. Um den ersteren einzuschlagen, schliesse ich folgendermaßen: Um zu bewirken, daß in dem zweiten Gefäß gerade 4 Liter bleiben, muß man von diesem Gefäß, wenn es voll ist, gerade 1 Liter fortnehmen: Dies kann aber nur so ausgeführt werden, daß man jenes Liter in eines der beiden anderen Gefäße gießt, wenn demselben nur noch ein Liter fehlt, um voll zu sein; dies kann bei dem ersten Gefäß nicht vorkommen (denn wenn das zweite voll wäre und dem ersten nur noch ein Liter fehlen sollte, um auch voll zu sein, so würde dies schon 12 Liter erfordern); es muß also das dritte Gefäß dasjenige sein, dem nur noch ein Liter fehlen soll, um voll zu sein, d. h. also es müssen in ihm 2 Liter enthalten sein. Dieser Zustand kann nun auf 2 Arten erreicht werden: 1) indem dem vollen dritten Gefäß ein Liter genommen oder 2) indem in das leere dritte Gefäß 2 Liter gegossen werden. Der erste Fall ist unmöglich, denn dann müßte ja einem der beiden anderen Gefäße gerade nur noch ein Liter fehlen, was wir ja bei dem zweiten Gefäß gerade erstreben, also noch nicht voraussetzen dürfen und was bei dem ersten Gefäß auch nicht möglich ist, weil dann gegen die Voraussetzung im ersten Gefäß 7 und im dritten 3, also im ganzen 10 Liter Wein vorhanden wären; es bleibt also nur der zweite Weg, d. h. es müssen in das dritte Gefäß zwei Liter gegossen werden. Diese zwei Liter können aber nicht aus dem ersten Gefäß kommen (denn wenn bei leerem dritten Gefäß das erste nur 2 Liter enthielte, so könnten, auch wenn das zweite ganz voll wäre, nur 7 Liter Wein gegen die Voraussetzung vorhanden sein); die 2 Liter müssen also aus dem zweiten Gefäß kommen. Um nun zu bewirken, daß in dem zweiten Gefäß gerade 2 Liter sind, muß man, wenn es voll ist, 3 Liter davon abnehmen, was sehr leicht ist, da wir ja ein Dreilitergefäß haben. Geht man umgekehrt diesen Weg, so wird man die erste Lösung der Aufgabe finden.“ Ein entsprechendes Raisonement giebt Bachet dann für die zweite Methode, jedoch verzichten wir auf Wiedergabe des-

selben und geben einfach die beiden Lösungen unserer Aufgabe in folgendem, leicht verständlichen Schema:

1)

<i>A</i> (8)	<i>B</i> (5)	<i>C</i> (3)
8	0	0
3	5	0
3	2	3
6	2	0
6	0	2
1	5	2
1	4	3
4	4	0

2)

<i>A</i> (8)	<i>B</i> (5)	<i>C</i> (3)
8	0	0
5	0	3
5	3	0
2	3	3
2	5	1
7	0	1
7	1	0
4	1	3
4	4	0

§ 2. Allgemeine Methoden für die Zweiteilung.

Es entsteht nun die Frage, ob die Aufgabe auch noch lösbar ist, wenn die Inhalte der 3 Gefäße irgend welche anderen sind, wenn ferner nicht zu gleichen Teilen, sondern in einem anderen Verhältnis geteilt werden soll, schliesslich wenn nicht 3, sondern 4 resp. allgemein $n + 1$ Gefäße vorhanden sind und die ganze Menge etwa in 3 resp. n unter sich gleiche Teile geteilt werden soll. Die erste Erweiterung, d. h. die Aufgabe: „Gegeben sind 3 Gefäße *A, B, C*, welche bezw. a, b, c Liter halten: das Gefäß *A* ist mit Wein gefüllt, der mit Hilfe der anderen beiden leeren Gefäße in 2 gleiche Teile geteilt werden soll; wie ist die Teilung auszuführen?“ ist erledigt von dem Herausgeber von Bachet's „Problèmes“, Herrn Labosne, der hierfür 2 Methoden giebt.¹⁾

Der Anfangszustand ist in schon oben angewandter Schreibweise: $a \ 0 \ 0$, wobei wir die Gefäßinhalte, wie auch weiterhin stets, in der Reihenfolge *A, B, C* angeben; wir nehmen an, daß $b \geq c$ ist. Als erste Manipulation bleibt nichts anderes übrig, als eins der Gefäße *B* und *C* aus *A* zu füllen; als zweite könnte nun die Füllung des dann noch leeren Ge-

1) Bachet-Ausgabe, 4. Aufl. Paris 1879, p. 145.

fäßes aus A erfolgen¹⁾, doch hätte dies keinen Zweck, da alsdann bei vollen Gefäßen B und C nachher sofort das eine wieder in A entleert werden müßte, mithin 2 sich aufhebende Operationen ausgeführt würden; es muß also notwendig von den beiden Gefäßen B und C das volle in das noch leere gegossen werden resp. soviel davon, bis das andere voll ist. Wir haben hiernach alsdann folgende beiden Fälle:

$$1). a - b \quad b - c \quad c \quad 2) a - c \quad c \quad 0$$

Die Fortsetzung von 1) kann jetzt nur in der Weise erfolgen, daß in das erste oder zweite Gefäß etwas gegossen wird, da das dritte Gefäß ja voll ist. Das zweite durch den Inhalt des dritten oder aber aus dem ersten zu füllen oder auch den Inhalt des zweiten in das erste zu gießen, würde zu Stellungen führen, die bereits überwunden oder als unbrauchbar abgethan sind, also einen Rückschritt involvieren, so daß also notwendig der Inhalt des dritten Gefäßes in das erste gegossen werden muß. Weiter muß dann das zweite Gefäß von neuem in das dritte entleert werden und dieses dann wieder, wenn es voll ist, in das erste u. s. w., bis das zweite Gefäß leer ist, wonach dann im allgemeinen in dem dritten Gefäß ein gewisser, dasselbe nur zum Teil füllender Rest verbleibt. Die Fortsetzung dieses Schlußverfahrens würde zeigen, daß man dann wieder von neuem dieselben Operationen auszuführen hat, d. h. B von neuem aus A füllen und es dann in C entleeren muß etc., bis die Teilung erreicht ist. Entsprechend ergibt sich für den Fall 2), daß man fortgesetzt das dritte Gefäß aus dem ersten zu füllen und dann den Inhalt des dritten in das zweite zu gießen hat, bis das letztere voll ist, wonach es in das erste entleert wird und den im allgemeinen in dem dritten noch verbleibenden Rest aufnimmt.

1) Falls die Weinmenge hierzu nicht mehr reicht, so ist es auch dann zwecklos, das noch leere Gefäß, so weit wie möglich, zu füllen, da man dann doch nachher entweder den Inhalt eines der Gefäße B und C in A entleeren oder das nur zum Teil gefüllte aus dem bereits vollen füllen müßte, was beides überflüssige Operationen involvieren würde.

Es ergeben sich somit als einzige Methoden, welche überhaupt geeignet sind, einen Fortschritt im Sinne der gestellten Aufgabe herbeizuführen, zwei, ohne daß damit jedoch schon gesagt ist, daß diese nun auch das Verlangte leisten. Diese beiden Methoden beruhen auf der Anwendung von gewissen Cyklen von Operationen, von denen der eine Cyklus gewissermaßen die Umkehrung des anderen ist, da in dem einen Falle dem Gefäße A das Quantum b genommen und dafür ein gewisses Vielfaches von c , etwa nc , zurückgegeben wird, so daß in C ein Rest $b - nc < c$ bleibt, das andere Mal dagegen A ein Vielfaches von c genommen, $(n + 1)c$, und ihm b zurückgegeben wird, so daß in B ein Rest $(n + 1)c - b < c$ bleibt. In den einzelnen Stadien der Ausführung dieser Cyklen haben wir im ersten Fall in B successive die Reste $b - c, b - 2c, \dots, b - (n - 1)c$ und schließlich $b - nc$, das dann in C gegossen wird, und im zweiten Fall haben wir in B successive die Mengen $c, 2c \dots nc$ und schließlich $(n + 1)c - b$. Werden nun die Cyklen nochmals ausgeführt, so haben wir im ersten Fall in B successive die Mengen $2b - (n + 1)c, 2b - (n + 2)c \dots$ und schließlich $2b - 2nc$, und wenn dies $> c$ ist, also C noch einmal aus B gefüllt werden kann, dann zum Schluß den Rest $2b - (2n + 1)c < c$, der dann in C entleert wird, und im zweiten Fall in B die Mengen $(n + 2)c - b, (n + 3)c - b, \dots (2n - 1)c - b$ und zum Schluß als Rest, nachdem B entleert ist: $(2n + 1)c - 2b$ resp. $(2n + 2)c - 2b$ je nach dem gegenseitigen Größenverhältnis u. s. f. Wir sehen so, daß jede der beiden Methoden der Reihe nach alle Mengen von der Form $mb - nc$ resp. $n'c - m'b$ liefert. Die Aufgabe ist also gelöst, wenn sich hierunter auch einmal die Menge $\frac{a}{2}$ oder auch nur $\frac{a}{2} - c$ befindet; denn im letzteren Falle würde diese Menge zusammen mit dem Inhalt von C die Hälfte des zu teilenden Quantums geben. Dazu ist natürlich notwendig, daß B auch die Menge $\frac{a}{2} - c$ mindestens faßt, d. h. es muß $b \geq \frac{a}{2} - c$ sein oder $a \leq 2(b + c)$. Es handelt

sich also darum, ein Paar ganzer Zahlen m, n resp. m', n' so zu bestimmen, daß $mb - nc = \frac{a}{2}$

resp. $n'c - m'b = \frac{a}{2}$ ist, eine Aufgabe, die bekanntlich dann und nur dann lösbar ist, wenn b und c relativ prim sind oder ihr größter gemeinsamer Teiler in $\frac{a}{2}$ enthalten ist. Den Fall, daß b und c einen in $\frac{a}{2}$ enthaltenen Faktor gemein haben, dürfen wir jedoch unberücksichtigt lassen, da dieser Fall mit einem anderen äquivalent wäre, welcher sich ergibt, wenn unsere Zahlen a, b, c durch jenen Faktor gekürzt werden, so daß wir also b und c als relative Primzahlen annehmen dürfen. Danach erscheint unsere Aufgabe zunächst algebraisch als unbedingt lösbar, immerhin entsteht aber doch noch die Frage, ob die oben algebraisch skizzierten Operationen auch stets realisierbar sind; dies wird lediglich davon abhängen, ob das Gefäß A unter allen Umständen Flüssigkeit genug besitzt, um die vorgeschriebenen Füllungen der anderen Gefäße zu leisten. Daß beide Gefäße, B und C , ganz gefüllt werden, wird, wie schon oben angeführt, niemals erforderlich sein, da ja doch das eine derselben gleich wieder entleert werden mußte; jedoch kann es vorkommen, daß dem einen Gefäß nur noch ein Liter fehlt, um voll zu sein, und das andere dann gerade zu füllen ist; hierfür muß dann die gesamte Menge Flüssigkeit wenigstens $= b + c - 1$ sein. Wir werden also im allgemeinen die Bedingung stellen müssen: $a \geq b + c - 1$. Somit haben wir gefunden, daß unsere Aufgabe unter den Voraussetzungen, daß b und c relativ prim sind und daß $b + c - 1 \leq a \leq 2b + 2c$ ist, stets lösbar ist und zwar auf 2 Arten. Betrachten wir die für die spezielle Aufgabe in § 1 gegebenen Lösungen, so sehen wir, daß es thatsächlich dieselben sind wie die, welche jetzt aus unseren allgemeinen Methoden resultieren.

§ 3. Bedingungen der Lösbarkeit.

Von den beiden Ungleichheitsbedingungen des vorigen § ist nur $a \leq 2b + 2c$ absolut notwendig, die andere $b + c - 1 \leq a$

ist nur notwendig für die Ausführbarkeit beider Methoden, also für das Bestehen von 2 Lösungen, jedoch kann auch ohne sie eine Lösung existieren. So ist der Fall $a = 10, b = 9, c = 4$ ($a < b + c - 1$) natürlich lösbar, weil die Differenz von b und c schon die gewünschte Menge von 5 Litern giebt, oder z. B. der Fall $a = 14, b = 11, c = 5$, für den sich folgende Lösung nach der ersten Methode des § 2 ergibt:

A (14)	B (11)	C (5)
14	0	0
3	11	0
3	6	5
8	6	0
8	1	5
13	1	0
13	0	1
2	11	1
2	7	5
7	7	0

Die andere Methode versagt hier, da man bald auf die Stellung kommt, daß einem Gefäß nur noch ein Liter an seinem vollen Inhalt fehlt, und nun das andere noch gefüllt werden soll, wozu die vorhandene Flüssigkeitsmenge dann nicht ausreicht; man erhält nämlich nach dieser Methode:

A (14)	B (11)	C (5)
14	0	0
9	0	5
9	5	0
4	5	5
4	10	0

und dann ist die weitere Fortsetzung unmöglich, da der Inhalt von A nicht mehr ausreicht, um C zu füllen. Ferner existiert, um noch einige Fälle anzuführen, welche der Bedingung $a \geq b + c - 1$ nicht genügen, je eine Lösung für $a = 16, b = 11, c = 7$ nach der ersten und für $a = 14, b = 11, c = 6$, sowie $a = 20, b = 17, c = 9$ nach der zweiten Methode. Da-

gegen giebt es gar keine Lösung mehr in dem von Bachet (l. c. p. 146) angeführten Beispiel $a = 16$, $b = 12$, $c = 7$. Wir werden später sehen, daß für den Fall $a \geq b + c - 2$ jedenfalls immer noch eine Lösung existiert, eine Bedingung, welche für einen Teil der zuletzt angeführten Aufgaben noch erfüllt war, welche aber auch noch immer nicht unbedingt notwendig ist, wie z. B. der Fall $a = 14$, $b = 11$, $c = 6$ zeigt.

§ 4. Teilung nach beliebigem Verhältnis.

Herr Schubert hat wohl zuerst dem Problem die Form gegeben, die Teilung in beliebigem Verhältnis auszuführen¹⁾, wobei dann a natürlich nicht mehr eine gerade Zahl zu sein braucht, und verlangt infolgedessen, daß ein solches Verfahren angegeben wird, daß jedes Maß $< a$ erhalten werden kann und zwar entweder in A oder in B natürlich. Man sieht nun, daß bei den angegebenen Methoden, wo für den Inhalt von B der Reihe nach alle Zahlen von der Form $mb - nc$ resp. $n'c - m'b$ nach der einen oder anderen Methode auftreten (m und n beliebige ganze Zahlen), dies, da b und c relativ prim sind, offenbar alle ganzen Zahlen sind, welche $\leq b$ sind, und es können daher in A jedenfalls die zugehörigen Reste von a erhalten werden, d. h. alle Zahlen von a bis $a - b$ incl. abwärts. Dagegen fehlen eventuell die Zahlen von $a - b - 1$ bis $b + 1$ einschließlich beider Grenzen. Man kann den Inhalt von A nun aber noch dadurch erniedrigen, daß man mit ihm das Gefäß C füllt, und erhält so in A alle Maße von a bis $a - b - c$ incl. Damit nun so alle Zahlen überhaupt vorkommen, also das Problem in ganzer Allgemeinheit lösbar ist, verlangt Herr Schubert, daß

$$a - b - c \leq b + 1 \text{ oder}$$

$$a \leq 2b + c + 1,$$

und unterwirft also a den Bedingungen

$$b + c - 1 \leq a \leq 2b + c + 1.$$

Man wird aber auch eine solche Lösung berücksichtigen müssen, welche alle Maße entweder in einem Gefäß oder in

1) „Zwölf Geduldspiele“. Berlin 1895, p. 112; vgl. a. Naturwissensch. Wochenschrift IX, 1894.

zweien zusammen liefert, und wenn wir uns auf diesen Standpunkt stellen, so erhalten wir in B und dem aus A gefüllten C zusammen nach unseren beiden Methoden alle Masse von 1 bis $b + c$ incl. und brauchen also nur noch zu fordern: $a - b - c \leq b + c + 1$ oder $a \leq 2b + 2c + 1$. Wir erhalten also durch diese Erweiterung des Problems für das a keine engere Bedingung im Vergleich mit unseren Bedingungen in § 2, vielmehr fallen beide zusammen, denn für gerades a — und mit solchem hatten wir es in § 2 ja nur zu thun — kommt unsere Bedingung darauf hinaus, daß $a \leq 2b + 2c$ sein muß, wie es damals auch hieß. Wir können also jetzt zusammenfassend sagen:

Theorem I: Sind b und c relativ prim, und genügt a den Bedingungen $b + c - 1 \leq a \leq 2b + 2c + 1$, so ist eine Teilung der a Liter in jedem beliebigen Verhältnis, sogar nach zwei verschiedenen Methoden, möglich.

Wir veranschaulichen dies an einem Beispiel: Wählen wir, wie in der ursprünglichen Aufgabe des § 1: $b = 5$, $c = 3$, so darf, wie unser Theorem besagt, a jedenfalls zwischen 7 und 17 einschließlic der Grenzen liegen: wir geben für diese beiden Grenzfälle nach Methode I die natürlich in den Spalten für B und C übereinstimmenden Lösungen:

A (7)	B (5)	C (3)
7	0	0
2	5	0
2	2	3
5	2	0
5	0	2
0	5	2
0	4	3
3	4	0
3	1	3
6	1	0
6	0	1
1	5	1
1	3	3
4	3	0
4	0	3
7	0	0

A (17)	B (5)	C (3)
17	0	0
12	5	0
12	2	3
15	2	0
15	0	2
10	5	2
10	4	3
13	4	0
13	1	3
16	1	0
16	0	1
11	5	1
11	3	3
14	3	0
14	0	3
17	0	0

$5 + 2 = 7$

$5 + 1 = 6$

Bei dem zweiten Beispiel ist noch zu beachten, daß aus der Stellung 12 5 0 sofort folgt: 9 5 3 ($5 + 3 = 8$), und man sieht dann, daß alle möglichen Teilungen erhalten werden.

Schließlich kommt man stets zu der Anfangsstellung zurück. Die Anwendung der zweiten Methode, welche ja die Umkehrung der ersten ist, wie schon oben (S. 57) bemerkt, liefert dieselben Stellungen, aber in umgekehrter Reihenfolge¹⁾, wie man leicht sieht.

Nehmen wir nun einmal an, a sei $= b + c - 2$, also erfülle die eine der obigen Bedingungen nicht mehr, dann werden unsere Methoden anwendbar sein, bis man an die Stellung kommt, wo das eine der Gefäße B und C voll ist bis auf 1 Liter und das andere gefüllt werden soll; auf diese Stellungen muß man aber auch kommen, weil ja die Methode an und für sich alle Teilungen liefert. Je nachdem man nun die erste oder zweite Methode anwendet, wird die weitere Fortsetzung an einer der für dieses a unmöglichen Stellungen

$$\begin{array}{cc} B & C \\ b & c - 1 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{cc} B & C \\ b - 1 & c \end{array}$$

scheitern. Wir werden also jedenfalls nicht mehr, wie oben, einen geschlossenen Cyklus erhalten, der uns, von oben nach unten gelesen, die Stellungen nach der einen und, in entgegengesetzter Richtung gelesen, die nach der anderen Methode liefert; sondern jetzt wird die Reihe, wenn wir die Stellungen, die die erste Methode liefert, von oben ab beginnend hinschreiben und die der zweiten von unten ab, sich nicht schließen, vielmehr an einer Stelle einen Einschnitt haben, aber auch nur an einer, denn die beiden unmöglichen Stellungen müssen unmittelbar auf einander folgen, da die nach der Stellung

$$\begin{array}{cc} B & C \\ b & c - 1 \end{array}$$

auszuführende Operation (nach Meth. I) die ist, daß C aus B gefüllt wird, also der obigen Stellung die Stellung

$$\begin{array}{cc} B & C \\ b - 1 & c \end{array}$$

1) Schubert, Geduldspiele p. 119.

folgt und vice versa; diese beiden Stellungen können aber andererseits auch in der ganzen Reihe nur einmal vorkommen, da unsere Methoden bei Wiederkehr derselben Stellung ja eine Reihe sich aufhebender Operationen in sich schlossen. Wir können also nach wie vor zu jeder beliebigen Stellung in unserer Reihe, d. h. zu jeder beliebigen Teilung, kommen, nur ist es jetzt nicht mehr gleichgültig, von welchem Ende wir ausgehen oder mit anderen Worten: welche Methode wir anwenden.

Wir veranschaulichen auch dies zunächst an einem Beispiel: $b = 13$, $c = 9$, also $a = b + c - 2 = 20$, wobei wir (s. nebenstehendes Schema) eine geschlossene Reihe erhalten, wenn wir uns vorstellen, daß das für die eine unausführbare Operation erforderliche Quantum zunächst geborgt wird, und dies durch ein Minuszeichen ausdrücken.¹⁾

Damit ist denn nun auch der am Ende von § 3 versprochene Nachweis geliefert, daß für $a = b + c - 2$ die Teilung in

A (20)	B (13)	C (9)
20	0	0
7	13	0
7	4	9
16	4	0
16	0	4
3	13	4
3	8	9
12	8	0
12	0	8
(- 1)	13	8
(- 1)	12	9
8	12	0
8	3	9
17	3	0
17	0	3
4	13	3
4	7	9
13	7	0
13	0	7
0	13	7
0	11	9
9	11	0
9	2	9
18	2	0
18	0	2
5	13	2
5	6	9
14	6	0
14	0	6
1	13	6
1	10	9
10	10	0
10	1	9
19	1	0
19	0	1
6	13	1
6	5	9
15	5	0
15	0	5
2	13	5
2	9	9
11	9	0
11	0	9
20	0	0

1) Die Ausführungen von Herrn Schubert über diesen Fall („Geduldspiele“ p. 118), wonach die Teilbarkeit hier eine beschränkte und nur nach gewissen Verhältnissen möglich sei, sind damit hinfällig geworden.

gleiche Teile jedenfalls noch möglich sei, und wir können abschließend sagen:

Theorem II: Sind b und c relativ prim und ist

$$b + c - 2 \leq a \leq 2b + 2c + 1,$$

so ist eine Teilung von a nach beliebigem Verhältnis jedenfalls auf eine Art möglich.¹⁾

Nach der in diesem § gewonnenen Auffassung kann es uns auch nicht mehr wunder nehmen, daß besondere Teilungen selbst dann bisweilen noch möglich sind, wenn die in unserem Theorem aufgestellten Bedingungen nicht mehr erfüllt sind. So ist z. B., wie schon S. 60 erwähnt war, in dem Fall $a = 14$, $b = 11$, $c = 6$, obwohl $a < b + c - 2$ ist, eine Teilung in 2 gleiche Teile noch möglich. Würden wir hier unsere Methode in derselben Weise anwenden wie auf den Fall $a = 20$, $b = 13$, $c = 9$ in diesem §, so würden wir ein Schema mit zwei unübersteigbaren Einschnitten statt eines erhalten; die in dem Raum zwischen beiden enthaltenen Teilungen sind dann unerreichbar, welche Methode man auch anwendet. Zufällig gehört nun die Halbierung aber nicht dazu, wird vielmehr in folgender Weise erhalten:

A (14)	B (11)	C (6)
14	0	0
8	0	6
8	6	0
2	6	6
2	11	1
13	0	1
13	1	0
7	1	6
7	7	0

§ 5. Dreiteilung.

Was schließlich die Ausdehnung auf mehr als 3, also etwa 4 Gefäße und dementsprechend eine Dreiteilung anlangt,

¹⁾ Das Intervall für a geht hier also auf beiden Seiten weiter als bei Herrn Schubert.

so gehen wir hierauf nicht näher ein. Im allgemeinen wird mit wachsender Zahl der Gefäße die Aussicht auf Lösbarkeit und die Zahl der Lösungen wohl wachsen. In sehr vielen Fällen wird man, nachdem ein oder mehrere Teile in gewünschter Weise hergestellt sind, für die weitere Teilung auf die einfacheren Fälle zurückgreifen müssen. Wir geben hierfür als Beispiel die Aufgabe der Dreiteilung von 24 Litern, wenn die anderen 3 Gefäße bezw. 13, 11, 7 Liter fassen:

<i>A</i> (24)	<i>B</i> (13)	<i>C</i> (11)	<i>D</i> (7)
24	0	0	0
13	0	11	0
13	0	4	7
13	4	0	7
20	4	0	0
9	4	11	0
9	4	4	7
16	8	0	0

Damit ist ein Drittel in *B* gewonnen, und es sind jetzt nur noch die 16 Liter in 2 gleiche Teile zu teilen mittelst der Gefäße *C* und *D*, wofür wir auf den in § 3, S. 59 als lösbar nach der ersten Methode angeführten Fall $a = 16$, $b = 11$, $c = 7$ recurrieren.¹⁾

1) Ein von den Herren Ball (*Mathematical Recreations* 1892, p. 17) und Schubert (*Geduldspiele* p. 113) hier angeführter Fall $a = 24$, $b = 13$, $c = 11$, $d = 5$ reduziert sich sofort auf den früheren Fall der Halbierung, da $b - d$ sofort das eine Drittel giebt; die dort gegebene Lösung ist nicht die einfachste und bereits von Herrn Fitz-Patrick, dem Veranstalter einer französischen Übersetzung des Ball'schen Werkes (Paris 1898, p. 29), durch eine einfachere ersetzt worden.

Kapitel V.

Parquetierungen.

*Non mihi si linguae centum sint, oraque
centum, enumerare possem, quam multis in
rebus usus sit numerorum.*

PHILIPP MELANCTHON.
Vorrede zu Michael Stifel's Arithm. integra.

Aufgabe: *Eine Fläche soll mit Steinen ausgelegt werden, welche die Form regulärer Polygone haben; welche Formen sind hier anwendbar, wenn*

- 1) *Polygone einer Art,*
- 2) *Polygone verschiedener Arten*

verwandt werden? Dabei sollen die etwa an den Rändern der Fläche verbleibenden Lücken mit Teilstücken ausgefüllt werden.

Zu weiterer Präzisierung der Aufgabe erheben wir die Forderung, daß alle Punkte, in denen die Ecken der Polygone zusammenstoßen, insofern gleichgeartet sein sollen, als sie alle in der Zahl und Art der in ihnen zusammenstossenden Polygone, dagegen nicht notwendig in deren gegenseitiger Anordnung übereinstimmen sollen.

Die einzige Bedingung für die Möglichkeit einer Kombination ist offenbar die, daß die Summe der in je einem Punkte zusammenstoßenden Winkel $4R$ beträgt. Da nun die Summe der Außenwinkel eines Polygons, unabhängig von der Seitenzahl, stets $= 4R$ ist (s. Fig. 1), so wird der Außenwinkel des regulären Polygons mit wachsender Seitenzahl immer kleiner, sein Nebenwinkel, der Polygonwinkel, also immer größer, ohne jedoch die obere Grenze $2R$ zu erreichen. Um also den Winkelraum von $4R$ mit regulären Polygonen *einer* Art (erster Teil der Aufg.) auszufüllen, sind mindestens deren

3 erforderlich, und zwar passen hierfür gerade drei 6-Ecke, während Polygone größerer Seitenzahl hier überhaupt unbrauchbar sind, da drei von ihnen eine Winkelsumme $> 4R$, zwei dagegen eine solche $< 4R$ liefern würden. Der kleinste Polygonwinkel, der Dreieckswinkel, ist der 6-te, der Viereckswinkel der 4-te Teil von $4R$, während mit dem 5-Eckswinkel sich der Winkelraum um einen Punkt herum nicht ausfüllen läßt (s. Fig. 1, Kap. XVIII). Die erste Frage beantwortet sich also dahin, daß die Parquetierung nur mit Dreiecken, Vierecken und Sechsecken gemacht werden kann, so zwar, daß davon bezw. je 6, 4 und 3 Polygone in jedem Punkte zusammenstoßen.

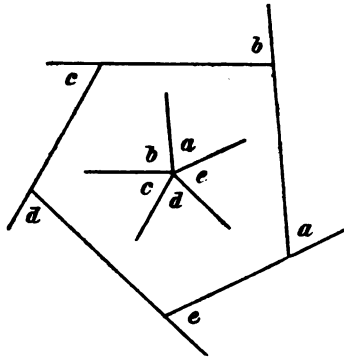


Fig. 1.

Verwendet man zweitens Polygone verschiedener Arten, so dürfen wir annehmen, daß unter den in jedem Punkte zusammenstoßenden sich nur je ein Dreieck befindet; je 2 Dreieckswinkel lassen sich nämlich stets gerade durch einen Sechseckswinkel ersetzen; die Fälle mit mehr als einem Dreieck in je einem Punkte ergeben sich also nachher aus den Fällen, in denen Sechsecke vorkommen. Befindet sich unter den in einem Punkte zusammenstoßenden Polygonen aber nur höchstens ein Dreieck, so können dort, da der Viereckswinkel schon $= 1R$ ist, höchstens 4 Polygone zusammenstoßen, andererseits müssen es aber mindestens 3 sein. In dem letzteren Falle, bei je 3 Polygonen, beträgt die Summe der Außenwinkel der 3 Polygonwinkel $2R$; haben wir also je ein m_1 -, m_2 - und m_3 -Eck in jedem Punkte, so muß

$$\frac{4}{m_1} + \frac{4}{m_2} + \frac{4}{m_3} = 2 \quad \text{oder}$$

$$(1) \quad \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} = \frac{1}{2} \quad \text{sein.}$$

Es sei nun $m_1 \leq m_2 \leq m_3$; dann ist offenbar $m_1 \leq 6$.
Hiernach ergeben sich folgende Fälle:

1) $m_1 = 3$; also lautet die Gleichung (1) jetzt:

$$\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} = \frac{1}{6}.$$

Dann muß aber der Annahme $m_2 < m_3$ wegen: $6 < m_2 \leq 12$ sein, und man erhält folgende Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} m_2 &= 7, & m_3 &= 42 \\ m_2 &= 8, & m_3 &= 24 \\ m_2 &= 9, & m_3 &= 18 \\ m_2 &= 10, & m_3 &= 15 \\ m_2 &= 12, & m_3 &= 12. \end{aligned}$$

2) $m_1 = 4$; die Gleichung (1) reduciert sich auf:

$$\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} = \frac{1}{4};$$

also $4 < m_2 \leq 8$; dies giebt:

$$\begin{aligned} m_2 &= 5, & m_3 &= 20 \\ m_2 &= 6, & m_3 &= 12 \\ m_2 &= 8, & m_3 &= 8. \end{aligned}$$

3) $m_1 = 5$; $\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} = \frac{3}{10}$; $5 \leq m_2 \leq 6$, also

$$m_2 = 5, \quad m_3 = 10.$$

4) $m_1 = 6$; $\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} = \frac{1}{3}$; $m_2 = 6$, $m_3 = 6$, der schon im ersten Teil der Aufgabe erledigte Fall.

Stoßen zweitens in jedem Punkte 4 Polygone zusammen, so betragen die 4 Außenwinkel zusammen $4R$, also lautet unsere Bedingungsgleichung jetzt

$$\frac{4}{m_1} + \frac{4}{m_2} + \frac{4}{m_3} + \frac{4}{m_4} = 4 \quad \text{oder}$$

$$(2) \quad \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4} = 1.$$

Ist $m_1 \leq m_2 \leq m_3 \leq m_4$, so muß $m_1 \leq 4$ sein. Nehmen wir

1) $m_1 = 3$; dann ist $\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4} = \frac{2}{3}$, also da nur ein Dreieck vorkommen soll: $4 < m_2 < 5$, d. h. $m_2 = 4$, $\frac{1}{m_3} + \frac{1}{m_4} = \frac{5}{12}$, also $m_3 = 4$, $m_4 = 6$.

2) $m_1 = 4$ liefert nur den schon im ersten Teil erledigten Fall von 4 Quadraten. Dazu treten dann noch diejenigen Fälle, welche sich aus den bereits angeführten durch Ersatz eines oder mehrerer 6-Ecke durch je zwei 3-Ecke ergeben, und wir erhalten schließlicly unter Zusammenfassung der beiden Teile der Aufgabe im ganzen folgende 17 Fälle in leicht verständlicher tabellarischer Zusammenstellung:

- I. 3, 7, 42.
- II. 3, 8, 24.
- III. 3, 9, 18.
- IV. 3, 10, 15.
- V. 3, 12, 12.
- VI. 4, 5, 20.
- VII. 4, 6, 12.
- VIII. 4, 8, 8.
- IX. 5, 5, 10.
- X. 6, 6, 6.
- XI. 3, 3, 4, 12.
- XII. 3, 3, 6, 6.
- XIII. 3, 4, 4, 6.
- XIV. 4, 4, 4, 4.
- XV. 3, 3, 3, 4, 4.
- XVI. 3, 3, 3, 3, 6.
- XVII. 3, 3, 3, 3, 3, 3.

Die dabei vorkommenden Polygonwinkel mögen in nachstehender Tabelle ihrer Größe nach zusammengestellt werden:

3-Eck	. . .	$\frac{2}{3} R = 60^\circ$.
4- "	. . .	$1 R = 90^\circ$.
5- "	. . .	$\frac{6}{5} R = 108^\circ$.
6- "	. . .	$\frac{4}{3} R = 120^\circ$.
7- "	. . .	$\frac{10}{7} R = 128\frac{4}{7}^\circ$.
8- "	. . .	$\frac{3}{2} R = 135^\circ$.
9- "	. . .	$\frac{14}{9} R = 140^\circ$.
10- "	. . .	$\frac{8}{5} R = 144^\circ$.
12- "	. . .	$\frac{5}{3} R = 150^\circ$.
15- "	. . .	$\frac{26}{15} R = 156^\circ$.
18- "	. . .	$\frac{16}{9} R = 160^\circ$.
20- "	. . .	$\frac{9}{5} R = 162^\circ$.
24- "	. . .	$\frac{11}{6} R = 165^\circ$.
42- "	. . .	$\frac{40}{21} R = 171\frac{3}{7}^\circ$.

Diejenigen Fälle, in denen immer je 3 Polygone zusammenstoßen, lassen hinsichtlich des Musters offenbar keine Wahl mehr; es mag Fig. 2 der Tafel den praktisch häufig angewandten Fall VIII der obigen Tabelle als Beispiel vorführen. In den Fällen mit 4 oder 5 Polygonen in jedem Punkte sind im allgemeinen noch wieder mehrere Muster möglich, außer natürlich, wenn die Polygone alle von einer Art sind. So geben z. B. die Fig. 3^a, 3^b zwei Muster für den Fall XIII und Fig. 4^a, 4^b, 4^c drei für den Fall XV.

Nachschrift. Erst nach Fertigstellung des vorstehenden Abschnitts bemerke ich, daß die obige Aufgabe, für welche ich bis dahin keinerlei Litteraturnachweise hatte finden können, bereits von Badoureau-

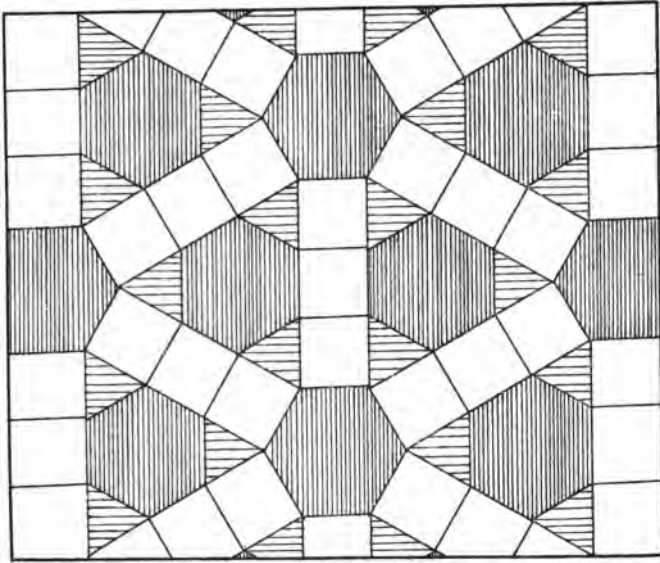


Fig. 3b.

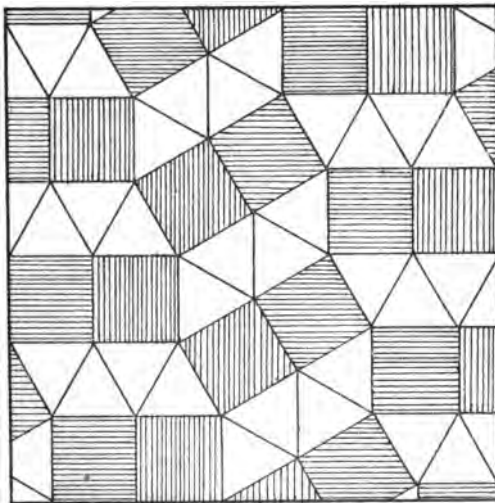


Fig. 4a.

(„Mémoire sur les figures isoscèles.“ Journal de l'école polytechnique, 49^{ième} cahier, tome XXX, 1881) gestellt und gelöst worden ist. Die dort gegebenen Figuren 59—65 beziehen sich auf die Fälle XIV, XVII, V, XII, VII, XIII (unsere Fig. 3^a) unserer Tabelle, während die Fig. 66 und 67 zwei Muster für den Fall XV (unsere Fig. 4^a und ein anderes sehr einfaches Muster) geben. Später ist dann das Problem noch von Herrn Lucien Lévy behandelt worden („Sur les pavages à l'aide de polygones réguliers.“ Bulletin de la société philomathique. 8^{ième} série, t. III, 1891, p. 46—50). Die dort (p. 48—49) gegebenen Figuren 1—3 beziehen sich auf unseren Fall XIII und geben für diesen 3 Muster, darunter (in Fig 1 und 3) die unserer Figuren 3^a und 3^b. Auch Herr Robin hatte („Carrelage illimité en polygones réguliers.“ La Nature XV, 1887, 2^{ième} semestre, p. 95/96) einige Parquetmuster angegeben, welche jedoch nur z. T. die von uns geforderte Homogenität des Musters in allen Punkten aufweisen. — Ähnliche diophantische Gleichungen wie die obigen treten übrigens auf bei Gruppen linearer Substitutionen, vgl. Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder. Leipzig 1884, p. 117, sowie Klein-Fricke, Vorlesungen über elliptische Modul-funktionen Bd. I, p. 341.

Kapitel VI.

Einige kleinere Unterhaltungen.

*Les jeux d'esprit sont de toutes les saisons
et de tous les âges; ils instruisent les Jeunes,
ils divertissent les Vieux, ils conviennent aux
Riches, et ne sont pas au-dessus de la portée
des Pauvres; les deux Sexes s'en peuvent
accommoder sans choquer la bienséance.*

OSANAM.

Récr. math. et phys. 1750. Préface.

§ 1. Ein Bachet'sches Spiel.

Zwei Personen machen aus, daß sie abwechselnd eine beliebige Zahl, jedoch nicht grösser als 10 nennen wollen; die so genannten Zahlen werden alle addiert, und als Sieger gilt derjenige, welcher zuerst auf 100 kommt.¹⁾

Die Chancen sind bei diesem Spiel nicht gleich, vielmehr gewinnt bei richtigem Spiel der Beginnende stets. Richtet er es nämlich so ein, daß er gerade die Zahl 89 erreicht, so mag der Gegner nennen, welche der Zahlen 1, 2...10 er will: beim nächsten Mal erreicht ersterer die 100. Um aber 89 mit Zuversichtlichkeit zu erreichen, muß vorher 78 besetzt werden; das Sprungbrett hierfür wieder ist 67 und so immer 11 weniger, so daß der Beginnende zunächst 1 nennt, beim nächsten Mal auf 12, dann auf 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89 und schliesslich auf 100 geht.

Selbstverständlich läßt sich sowohl der Maximalwert für die jeweilig zu nennende Zahl, wie auch die Zahl, welche das schliessliche Ziel des Spiels ist, beliebig anders wählen. Darf

1) s. Bachet, l. c. p. 115, Probl. XXII.

die jeweilig zu nennende Zahl a nicht überschreiten, so muß der Beginnende die Zahlen, welche um $a + 1$ und Vielfache von $a + 1$ kleiner sind als das Ziel b , besetzen. Ist z. B. $a = 7$ und das Ziel $b = 90$, so muß der Beginnende der Reihe nach besetzen 2, 10, 18, 26, 34, 42, 50, 58, 66, 74, 82, 90. Dies ist ihm jedoch nicht mehr unbedingt möglich, wenn $a + 1$ in b enthalten ist, und in diesem, allerdings einzigen, Falle gewinnt bei richtigem Spiel der zweite Spieler. Ist z. B. a wieder $= 7$, b aber $= 80$, so erreicht der zweite Spieler, welche Zahl auch der erste nennen mag, die 8, hiernach 16, 24 und schließlich das Ziel 80.

§ 2. Mutus dedit nomen cocis.

Das sehr verbreitete Kartenkunststück mit dem obigen Stichwort¹⁾ besteht darin, daß *einer der Anwesenden unter 10 Paaren Karten sich eins denkt und der Spielende nachher angiebt, welches die gedachten Karten waren.* Um dies zu ermitteln, verfährt er folgendermaßen: Er nimmt die Karten zunächst so zusammen, daß die eines Paares immer zusammenbleiben, und legt sie dann in 4 Reihen von je 5 so auf den Tisch, daß, wenn er sich das Stichwort in der Form

m u t u s
d e d i t
n o m e n
c o c i s

geschrieben denkt, die zu einem Paar gehörigen Karten auf solche Stellen zu liegen kommen, an denen hier derselbe Buchstabe vorkommt, also z. B. als erste (von links ab) Karte der ersten und als dritte der dritten Reihe. *Alsdann fragt der Spieler die betreffende Person, in welcher, bezw. in welchen Reihen die gedachten Karten liegen, und ist hiernach in der Lage, dieselben anzugeben.*

1) Das Spiel — ohne Stichwort — findet sich schon bei Bachet, l. c. p. 80—83.

In unserem Stichwort kommen nämlich entsprechend den 10 Paaren Karten gerade 10 verschiedene Buchstaben vor, jeder gerade zweimal. Jede Reihe enthält gerade einen Buchstaben doppelt, nämlich die erste *u*, die zweite *d*, die dritte *n* und die vierte *c*, und irgend 2 Reihen haben auch immer gerade einen gemeinsamen Buchstaben, z. B. die beiden ersten Reihen *t* und nur diesen.

Damit die Anwesenden den Trick des Spielers nicht bemerken, kann er natürlich von einem Male zum anderen die Reihenfolge der 4 Schlüsselworte ändern, also beim zweiten Mal etwa *dedit cocis nomen mutus* als Stichwort nehmen und nun dementsprechend die Karten anders legen.

Selbstverständlich läßt sich das Spiel mannigfach modifizieren sowohl hinsichtlich der Anzahl aller Karten, sowie auch hinsichtlich der Anzahl in einem Haufen.¹⁾ Als Stichwort für 8 Haufen von je 3 schlägt Ball²⁾ z. B. vor: *Lanata levete livini novoto*.

§ 3. Ein Kartenkunststück Monge's.

In der Welt des falschen Spiels bezeichnet man als „mathematisches“ Mischen ein Mischen der Karten, bei dem die Aufeinanderfolge aller Karten ungeändert bleibt und nur scheinbar gemischt, in Wirklichkeit nur einige Male abgehoben wird, so daß der Bankhalter vorher wissen kann, wie die Karten laufen werden. Weit mehr verdiente diesen Namen ein systematisches Verfahren, das der berühmte Mathematiker Monge³⁾ anwendet, um eine bestimmte Karte zu ermitteln, welche sich jemand anders unter einer gewissen Anzahl von Karten ge-

1) Bachet behandelt a. a. O. den allgemeinen Fall von $m(m-1)$ paarweise zugeordneten Karten in m Reihen.

2) *Mathem. Recr.* 1892, p. 101 = Französ. Übers. v. Fitz-Patrick p. 171. Seltsamerweise hat Ball das „Mutus“ des obigen Stichworts in das mit den Bedingungen des Spiels zwar vereinbare, aber jeden Sinns entbehrende „Matas“ verändert.

3) „Réflexions sur un tour de cartes.“ *Mém. de math. et de phys. présentés à l'acad. des sc. de Paris* 1773, p. 390—412.

dacht hat, wobei thatsächlich die Karten jedesmal gemischt, schliesslich jedoch alle wieder in die ursprüngliche Stellung zurückgeführt werden. Man verfährt folgendermassen: Derjenige, welcher sich die Karte gedacht hat, nimmt alle zu einem Pack zusammen und giebt an, die wievielte von oben die gedachte ist. Dann mischt der Ratende die Karten mit abgewandten Bildseiten und verändert damit ihre Reihenfolge völlig. Dies Mischen geschieht aber nun ganz systematisch, indem die zweite Karte auf die erste, die dritte unter die erste, die vierte auf die zweite, die fünfte unter die dritte u. s. w. gelegt wird. Aus der Reihenfolge 1 2 3 4 5 6 7 8 z. B. wird dann 8 6 4 2 1 3 5 7. Dann wird wieder von neuem ebenso gemischt u. s. f. Da nun bezüglich der Reihenfolge der Karten immer nur eine endliche, wenn auch vielleicht sehr grosse Anzahl von Möglichkeiten besteht, so muß man schliesslich, wenn auch vielleicht erst nach sehr langer Zeit einmal wieder zu einer schon dagewesenen Anordnung kommen. Diese kann aber nur aus derselben Anordnung hervorgehen, aus der auch jene andere, mit ihr übereinstimmende hervorgegangen war, und durch Fortsetzung dieses Schlusses ergibt sich, daß zuerst gerade die ursprüngliche Anordnung wiederkehren muß. Der Ratende muß nur wissen, nach wievielmalem Mischen dies bei seiner Anzahl Karten eintritt, und er kann dann, da ihm ja die Platznummer der gedachten Karte in der ursprünglichen Anordnung angegeben war, die betreffende Karte bezeichnen. Bei 10 Karten ist z. B. 6-maliges Mischen nötig, wie folgendes Schema zeigt:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	8	6	4	2	1	3	5	7	9
9	5	1	4	8	10	6	2	3	7
7	2	10	4	5	9	1	8	6	3
3	8	9	4	2	7	10	5	1	6
6	5	7	4	8	3	9	2	10	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10.

Die Zahlen jeder Vertikalen, von unten nach oben gelesen, geben die Platznummern an, welche die oberste Zahl der be-

treffenden Vertikalen nach den verschiedenen Mischungen einnimmt, so befindet sich 1 in dem obigen Beispiel successive auf den Plätzen 1, 6, 3, 7, 9, 10. Welcher Art nämlich die Vertauschungen sind, welche durch das Mischen entstehen, ersehen wir, indem wir irgend 2 aufeinanderfolgende Reihen vergleichen. So zeigen uns die beiden letzten, daß die an erster Stelle stehende Zahl (6) durch das Mischen an die sechste Stelle kommt, es ist daher 6 die zweite Platznummer von 1; dagegen sehen wir aus der dritten und letzten Reihe, daß die erste Zahl (3) erst durch 2 Mischungen an die dritte Stelle gelangt; 3 ist also die dritte Platznummer von 1 etc.

Ist die Anzahl der Karten ungerade, so behält die letzte Karte auch stets den letzten Platz. Wir dürfen uns daher auf die Fälle einer geraden Anzahl von Karten beschränken. Aus den von Monge über die in den einzelnen Fällen erforderliche Anzahl der Mischungen angestellten Betrachtungen stellen wir nur die einfachsten Fälle kurz tabellarisch zusammen¹⁾:

Anzahl der Karten	Anzahl der Mischungen
2	2
4	3
6	6
8	4
10	6
12	10
14	14
16	5
18	18
20	10.

1) s. Monge, l. c. p. 396. — Mit einer rationellen Methode zur Bestimmung dieser Zahl beschäftigen sich Bouniakowsky, „Sur un problème de position, relatif à la théorie des nombres.“ Bull. de la classe physico-mathématique de l'académie impériale des sciences de St.-Petersbourg XVI, 1858, p. 67—78 und Bourget, „Sur un problème de permutations successives nommé Battement de Monge.“ Journal de mathém. 3ième série, VIII, 1882, p. 413—434. — Übrigens ist die erforderliche Anzahl der Mischungen höchstens gleich der der Karten, welcher

Selbstverständlich handelt es sich hier um Iterationen einer Substitution, wenn auch Monge von der ihm noch nicht zu Gebote stehenden Terminologie der Substitutionentheorie natürlich keinen Gebrauch macht. Ist $2n$ die Anzahl der Karten, so ist $\binom{n-i+1}{2i}; \binom{n+i}{2i-1}$,

$i = 1, 2 \dots n$ oder $\binom{n+1 - (-1)^k \cdot \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor}{k}$, $k = 1, 2 \dots 2n$ (Bedeutung der eckigen Klammer s. S. 48) der analytische Ausdruck dieser Substitution.

Monge stellt eingehende Untersuchungen darüber an, welche Karten bei jedem Mischen ihren Platz beibehalten, und weiter, wann Gruppen von 2, 3, 4 Karten existieren, die bei jedem Mischen ihre Plätze nur cyklisch vertauschen. Die Bedingung dafür, daß eine Karte stets ihren Platz behält, ist nach Obigem: $n - i + 1 = 2i$ oder $i = \frac{n+1}{3}$, was die Fälle der 2., 4., 6., 8. Karte bei bezw. 4, 10, 16, 22 Karten u. s. w. liefert. Die Lage einer solchen invarianten Karte in einem Packet bestimmt sich also dadurch, daß der Karte doppelt so viele folgen, wie ihr vorausgehen¹⁾; abgesehen wird dabei natürlich von der ja auch stets invarianten letzten Karte in einem Packet von ungerader Anzahl. Läßt man also jemanden z. B. aus einem Packet von 10 Karten eine wählen und läßt ihn diese dann verdeckt wieder in den Haufen legen und zwar an die vierte Stelle, so kann man ihm, auch nachdem man beliebig oft in der angegebenen Weise gemischt hat, die ausgewählte

Maximalwert in den oben angeführten Fällen bei 14 und 18 Karten erreicht wird. Wenn nämlich die erste Karte an ihren Platz zurückkehrt, so sind auch alle anderen wieder an ihren ursprünglichen Plätzen (s. Bourget, l. c. p. 424); die erste Vertikale kann aber höchstens so viele verschiedene Zahlen aufweisen, wie Karten vorhanden sind, ohne daß die 1 wiederkehrt. Zugleich folgt hieraus, daß die Perioden aller Karten Teiler von der Periode der 1 sein müssen.

1) Thomas de Saint-Laurent. „Mélanges ou battements réguliers de cartes.“ Mémoires de l'académie du Gard. 1864/65. Nîmes p. 505 zeigt allgemein, daß die letzte Karte einer Reihe von Karten, die beim Mischen sich nur cyklisch mit einander vertauschen, doppelt so viel Karten unter sich hat, wie die erste über sich; in dem S. 75 von uns betrachteten Beispiel von 10 Karten ist 2, 5, 8 ein solcher Cyklus, dessen erster Karte eine vorausgeht und dessen letzter zwei Karten folgen.

Karte angeben, da dieselbe immer an der vierten Stelle verbleibt (s. a. das Schema S. 75).

Die ursprüngliche Stellung kehrt natürlich auch dann noch stets wieder, wenn irgend ein anderes, wofern nur konstantes Mischungsgesetz zu Grunde gelegt wird.¹⁾ Die Anzahl der hierfür erforderlichen Operationen bestimmt sich als kleinstes gemeinsames Vielfache mehrerer Zahlen, deren Summe gleich der Anzahl der Karten ist.²⁾

§ 4. Onkel und Nefte.

Die folgende Aufgabe zeigt zwar wenig Verwandtschaft zu den bisherigen Spielen dieses Kapitels, mag jedoch, da sie sich auch den übrigen Kapiteln schwer einreicht, hier ihren Platz finden. Der Engländer Kirkman stellte einmal die Frage: *Wie kann ein Knabe zugleich Onkel und Nefte eines anderen sein?*

„Baby Tom of baby Hugh

The nephew is and uncle too.

In how many ways can this be true?³⁾

Die beiden Knaben seien *I* und *II*; die beiderseitigen Eltern seien durch je einen darüber gesetzten Punkt (*A* resp. *B* in Fig. 1.) angedeutet. Soll *I* der Onkel von *II* sein, so muß er mit einem der Eltern von *II* verschwistert sein, ein Verhältnis, das wir durch eine punktierte Linie andeuten; das entsprechende gilt dann offenbar auch umgekehrt. Soll nun *I* mit

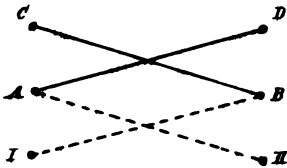


Fig. 1.

1) Solche Fälle sind auch verschiedentlich studiert worden, so z. B. von Guyot, *Récérations physiques et mathématiques* 1769, t. II, p. 86 ff., Thomas de Saint-Laurent, l. c. p. 515 und Gergonne (vgl. Kap. III § 5).

2) vgl. Hudson, *Educat. Times Repr.* III, 1865, p. 105.

3) s. Macfarlane, *Problem in relationship*. *Edinb. Proc.* XV, 1888, p. 116/117, sowie die Lösungen von Biddle und Macfarlane in *Educ. Times Repr.* Bd. 49, 1888, p. 114—116. Macfarlane entwickelte, anknüpfend an De Morgan, Leslie Ellis und Boole, einen vollständigen „Verwandtschafts-Calcul“ (s. außer den schon erwähnten die im litterarischen Index aufgeführten Arbeiten Macfarlane's aus den Jahren 1880—1883).

B oder richtiger dem einen Teil des Paares *B* verschwistert sein, so muß also von dem Paar *A* ein Teil mit einem Teil der Eltern des *B* ehelich verbunden sein, was wir durch eine ausgezogene Linie andeuten; ganz entsprechend bekommen wir eine zweite ausgezogene Linie zwischen *C* und *B*. Diese ausgezogenen Linien drücken also — um es nochmals hervorzuheben — aus, daß in den Ehen *A* und *D* (resp. *B* und *C*) der eine Teil, also entweder der männliche oder der weibliche, derselbe ist (eine völlige Coincidenz der beiden Ehepaare ist, wie man leicht sieht, ausgeschlossen, da sonst sich Großvater und Enkelin resp. Großmutter und Enkel heiraten würden); es sind danach die Kinder dieser beiden Ehen (d. h. *I* und der eine Teil von *B* resp. *II* und der eine Teil von *A*) Stiefgeschwister. Wir haben nun zu bedenken, daß die Punkte *A* und *B* je ein Paar bedeuten, ebenso auch *C* und *D*. Sind nun *D* die Eltern von demjenigen Teil von *B*, der auch dem Paare *C* angehört? Dann wären *D* also die Eltern von einem Teil des Paares *C*, also die Großeltern von einem Teil von *A* und daher eine Ehe zwischen letzterem und einem Teil von *D*, wie verlangt, ausgeschlossen. Es sind also notwendig *C* resp. *D* die Eltern von denjenigen Teilen der Ehepaare *A* resp. *B*, welche nicht in den Ehen *D* resp. *C* vorkommen. Wir wollen daher unter *A* resp. *B* jetzt nur diesen letzteren Teil des Paares verstehen und begreifen den anderen Teil unter *D* resp. *C* ein, wo er ja auch noch vorkommt. Danach ergeben sich nun leicht folgende 3 Fälle:

a) *A* und *B* sind Männer: 2 Männer *A* und *B* heiraten jeder die Mutter des anderen; die aus diesen beiden Ehen hervorgehenden Söhne sind zugleich Onkel und Neffe von einander.

b) *A* und *B* sind Frauen: 2 Frauen heiraten jede den Vater der anderen; etc.

c) *A* ist ein Mann und *B* eine Frau: ein Mann *A* heiratet die Mutter einer Frau *B*, welche selbst wiederum mit dem Vater des *A* sich verbindet; etc.

Kapitel VII.

Brettspiele.

Liebetraut. Dieß Spiel spielt' ich nicht, wenn ich ein großer Herr wär, und verbüt's am Hof und im ganzen Land.

Adelheid. Es ist wahr, dieß Spiel ist ein Probirstein des Gehirns.

GOETHE. Götz von Berlichingen. Zweit. Akt.

Das Schachspiel, welches . . . allem Dichtersinn den Garau zu machen völlig geeignet ist.

GOETHE. West-östlicher Divan.

Hempel'sche Ausg. 1872, p. 245/246.

§ 1. Mathematische Theorien der Brettspiele.

Die ältesten Brettspiele in der Art, wie unser Dame- oder Mühlespiel, gehen schon bis ins graue Altertum zurück. Wenn auch die Erzählungen mancher Autoren, insbesondere über das interessanteste und feinste aller Brettspiele, das Schachspiel, zweifellos in das Reich der Mythe gehören, wie z. B. dafs bereits Aristoteles Schach gespielt, Hippokrates und Galenus mittelst des „königlichen Spiels“ Heilungen ausgeführt oder gar bereits Adam seinen Trost über den Tod Abel's auf den 64 Feldern gesucht habe¹⁾, — so haben wir doch sichere Belege dafür, dafs in Aegypten bereits zur Zeit der Pharaonen eine Art Damespiel gepflegt wurde, wovon noch jetzt erhaltene Spielbretter Zeugnis ablegen; dafs ferner bereits die Freier der Penelope „mit Steineschieben ihr Herz erfreuten“²⁾ und

1) s. van der Linde, Geschichte und Litteratur des Schachspiels. 1874. Bd. I, p. 1—14 (Schachmythologie).

2) Odyssee I, 106.

„Jetzo fand sie die Freier, die üppigen, die vor des Hauses Doppelter Pfort' ihr Herz mit Steineschieben erfreuten“. (J. H. Vofs).

dafs bei den Römern ein Brettspiel, „*ludus latruncolorum*“ genannt, in Gebrauch war, das allerdings nach Ansicht des berühmten Schachtheoretikers v. Heydebrand u. d. Lasa¹⁾ mit der in der Odyssee erwähnten *περτελα* wohl identisch war. Von der Erfindung des Schachspiels hatten wir ja schon an einer früheren Stelle (Kap. III, § 2) Gelegenheit beiläufig zu sprechen. Es kann und soll selbstverständlich nicht unsere Aufgabe sein, alles das, was bereits über die Theorie dieser Spiele feststeht, hier wiederzugeben; ist doch allein die Theorie des Schachspiels so umfangreich, dafs sie ein eigenes mühevolleres Studium erfordert. Auch verdienen gerade kompliziertere Spiele, wie das Schachspiel, vom rein mathematischen Standpunkte aus betrachtet, kein so großes Interesse, da eine abschließende, alle nur möglichen Fälle umfassende Theorie kaum denkbar ist und für das Schach z. B. nicht im geringsten vorliegt, auch schwerlich jemals gewonnen werden wird, wir meinen eine Theorie, welche genau für jede nur denkbare Position den absolut besten Zug angeben würde und welche etwa als Resultat ergeben würde, dafs der Anziehende stets siegen muß²⁾ oder, was wohl wahrscheinlicher ist, die Partie — auch bei absolut korrektem Spiel des Gegners — stets unentschieden machen kann. Zwar hat man verschiedentlich versucht, auch die Mathematik der Schachtheorie dienstbar zu machen³⁾, jedoch wird man diese Ver-

1) Berliner Schachzeitung. 2. Jahrg. 1847, p. 241—246.

2) Der bekannte Schachtheoretiker Major von Jaenisch scheint dieser Ansicht zugeneigt zu haben und behandelt daher in seinem „*Traité des applications de l'analyse mathém. au jeu des échecs*“, Petersburg 1862 nur die Theorie der Endspiele, nicht die der Eröffnungen, indem er für eine spätere Zeit eine andere Aufstellung der Figuren zwecks Beseitigung des jetzt seiner Ansicht nach in dem Anzug liegenden Übergewichts voraussah. Eine andere Autorität, Max Lange, wendet sich allerdings mit aller Entschiedenheit gegen diese Jaenisch'sche Ansicht. (Schachzeitung XVIII, 1863, p. 97—102).

3) Rädell „Über die mathem. Behandlung des Schachspiels“, Berliner Schachzeitung III, 1848, p. 101—120 (unvollendet); Wekerle „Die

Ahrens, Mathem. Unterhaltungen.

suche als mißlungen ansehen dürfen, soweit es sich um die „Theorie“ in dem oben erläuterten Sinne handelt. Denn was soll man überhaupt unter einer „mathematischen“ Behandlung der Schachtheorie verstehen? Eine solche müßte sich von der Schachtheorie im gewöhnlichen Sinne dadurch unterscheiden, daß sie alle bei einer gegebenen Stellung überhaupt nur möglichen Züge in den Bereich ihrer Erwägungen zöge; dies übersteigt aber menschliches Können überhaupt. Ist doch, um nur ein Beispiel anzuführen, die Zahl aller verschiedenen nach 2 Zügen (2 von jeder Seite) möglichen Positionen¹⁾ bereits größer als 70000, wenn auch die meisten dieser Kombinationen mehr oder minder fehlerhafte Züge enthalten werden. Auch erscheint es für eine solche „mathematische“ Theorie aussichtslos, durch Benutzung spezifisch mathematischer Hilfsmittel eine Abkürzung des Verfahrens zu erreichen. Denn wenn man etwa an die Stelle der einfachen und übersichtlichen Gangarten der Figuren, des Mat etc. komplizierte Formeln²⁾ setzen und mit diesen gewisse Rechnungs-Algorithmien ausbilden wollte, wie dies in den oben citierten und anderen Arbeiten teilweise versucht ist, so würde in der That Arthur Schopenhauer Recht damit haben, daß der Mathematiker einem Menschen gliche, der sich seine gesunden Beine abschneide, um sich statt deren hölzerne ansetzen zu lassen — so unberechtigt dies Wort des wenig mathematikverständigen Philosophen auch sonst ist. Eine vollständig erschöpfende Berücksichtigung aller nur möglichen Kombinationen würde dem praktischen Schachspieler auch einen unverhältnismäßigen Auf-

Philosophie des Schach“ Leipzig 1879; W. Cluley „The Philosophy of Chess“; Jaenisch „Traité des applications de l'analyse mathématique au jeu des échecs“, Petersburg 1862 etc. etc.

1) Cunningham „Chess Problem“ British Assoc. Report 1890 (Leeds) p. 745 und Royal Engineer's Journal 1889 findet 71782, während Flye Sainte-Marie, Intermédiaire des mathém. t. II, 1895, p. 115 diese Zahl zu 71870 bestimmt.

2) Man vgl. hier die Gleichung des Springers, welche uns bei Gelegenheit des Rösselsprungproblems (Kap. XI, § 6) begegnen wird.

wand an Zeit und Kraft bedeuten, vielmehr scheidet sein taktischer Blick eine große Zahl offenbar fehlerhafter oder wertloser Züge von vornherein aus und läßt ihn seine ganze Kraft denjenigen zuwenden, die im Bereich des Möglichen liegen und deren Konsequenzen daher so weit wie möglich zu verfolgen sind: er gleicht einem Wanderer, der auf seiner Wanderschaft eine große Stadt passiert und sich ein Bild von dieser verschafft, indem er der Flucht der Hauptstraßen folgt, Lage und Aussehen der hervorragendsten und merkwürdigsten Gebäude sich genau einprägt und dann seine Wanderschaft fortsetzt, während ein anderer sich vornimmt, die Stadt nicht früher zu verlassen, als bis er jede, auch die offenbar unbedeutendste Straße passiert und jedes einzelne Haus betrachtet hat, hierbei allerdings vielleicht einmal eine Merkwürdigkeit entdeckt, welche dem ersteren entgangen, andererseits aber von Zeit zu Zeit sich in Sackgassen festrennt und einen unverhältnismäßig viel längeren Aufenthalt nehmen muß oder überhaupt ganz hängen bleibt. Es ist daher sehr richtig, wenn der bekannte Schachtheoretiker Dr. Max Lange sagt¹⁾, daß solche mathematischen Berechnungen, wie die von den citierten Autoren gegebenen, „das Vordringen zu dem letzten Grunde der Schachweisheit eher hemmen als fördern“. Zustimmung können wir jedoch Lange nicht mehr, wenn er durch ein offenbar nicht richtig verstandenes Wort Leibniz' veranlaßt meint²⁾, die heutigen Mittel der Mathematik seien vielleicht nur noch nicht im stande, solche Fragen zu lösen, und man müsse vielleicht „im Schachspiel einen höheren teleologischen Zweck erblicken, nämlich daß die Vorsehung unser Spiel nur deshalb so beliebt gemacht habe bei den Menschen, damit es immer weiter gefördert einmal in Zukunft einer der strengsten Wissenschaften als Quelle neuer Forschung und Ausbildung diene“. Übrigens würde mit einer erschöpfend

1) „Das Schach vom akademischen Standpunkt“. Berliner Schachzeitung II, 1897/98, p. 3.

2) l. c. p. 5, s. a. v. dems.: „Lehrbuch des Schachspiels“. 2. Aufl. Halle 1865, p. 190.

mathematischen Theorie natürlich das Interesse an dem Schach als einem „Spiel“ aufhören; denn seine Feinheit besteht gerade darin, daß durch die unermesslich große Zahl von Kombinationen einer abschließenden Behandlung vorgebeugt ist. Es darf bei dieser Gelegenheit erwähnt werden, daß sich schon jetzt aus Schachspielerkreisen Stimmen vernehmen lassen, daß man von den Partien der modernen Schachmeister im Gegensatz zu denen eines Anderssen und Morphy „keinen rechten Genuß habe infolge des niederdrückenden Gefühls, das diese immer unveränderliche mathematische Genauigkeit hervorruft.“¹⁾ „Steinitz und Lasker“ — so heißt es dort — „haben uns gelehrt, die Schönheit der Partien dem Siege und der Korrektheit derselben hintanzusetzen, sie haben uns gelehrt, die Kraft der Phantasie im Interesse der Korrektheit in Fesseln zu legen und dabei zu vergessen, daß die Phantasie und die aus derselben sich ergebende Schönheit der Kombination die Seele des Schachspiels sind und dessen Vorzüge begründen“ — Behauptungen, für welche wir die Verantwortung dem ungenannten „russischen Schachfreund“ überlassen müssen.

Auch die mathematischen Untersuchungen über den Wert der Figuren scheinen uns von ziemlich fragwürdiger Bedeutung zu sein. Der Wert einer Figur ist zweifellos kein absoluter, sondern hängt von ihrer eigenen Stellung und der der übrigen Figuren, von der Individualität des Spielers etc. ab, und diese Momente entziehen sich entweder ganz einer rechnerischen Behandlung, oder aber eine solche wird höchstens möglich auf Grund gewisser hypothetischer Annahmen, welche ihrerseits wieder doch nur der Ausfluß des im praktischen Spiel herangereiften Urteils sein können. Wozu dann aber, wenn dies subjektive Urteil doch als das letzte Forum erscheint, dasselbe durch eine Ziffer verdrängen wollen, wo diese ziffernmäßige Bewertung doch schwerlich so fein durchgebildet werden kann, um allen in Betracht kommenden Faktoren gerecht zu werden?

1) „Einige Worte über Lasker und die Richtung der Jetztzeit in der Schachspielkunst.“ Berliner Schachz. II 1897/98, p. 99—101.

Aus diesen Gründen werden wir uns hier auf einige ganz einfache Brettspiele beschränken und an diesen Fällen zeigen, welches die Aufgabe einer erschöpfenden Darstellung ist. — Zuvor wollen wir noch, da wir in diesem, wie in späteren Kapiteln einer einfachen Notation für die Schachfelder benötigen, dem hiermit etwa nicht vertrauten Leser bemerken, daß man in der deutschen Schachliteratur die horizontalen Reihen durch Ziffern, die vertikalen durch Buchstaben, wie in Fig. 1 angegeben,

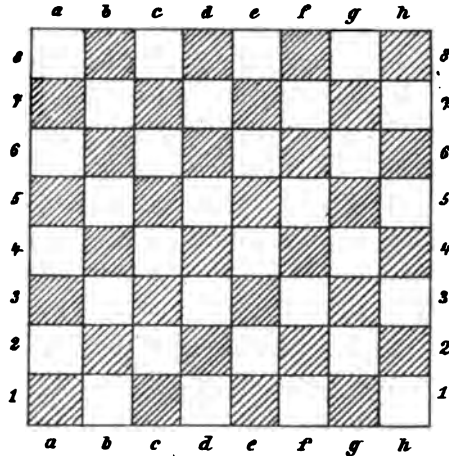


Fig. 1.

unterscheidet; das Feld *d7* z. B. ist hiernach das der Vertikalreihe *d* und der Horizontalreihe 7 angehörende.

§ 2. Die einfachste Form des Mühlespiels.

Das Spiel wird von 2 Personen auf einem Brett von der Form nebenstehender Fig. 2 mit je 3 Steinen gespielt. Die eine Person *W* hat weiße, die andere *S* schwarze Steine. *W* setzt zunächst einen seiner Steine auf einen der 9 durch Zahlen bezeichneten Punkte des Brettes, dann *S* gleichfalls, bis alle Steine gesetzt sind. Derjenige hat gewonnen, dessen 3 Steine zuerst in derselben horizontalen, vertikalen oder schrägen Geraden stehen, Stellungen, welche den Namen „Mühle“ führen. Wird dies beim Setzen noch nicht erreicht, so ziehen die beiden Spieler abwechselnd je einen ihrer Steine auf ein freies Nachbarfeld, um hierdurch eine Mühle zu erlangen.

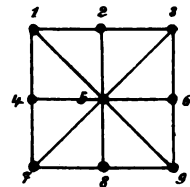


Fig. 2.

Bei richtigem Spiel gewinnt W stets, wie sich folgendermaßen ergibt: ¹⁾

W setzt zunächst auf das innere Feld 5, da dieses wegen seiner 8 Ausgänge gegenüber den 3 der anderen Felder offenbar bevorzugt ist. S setzt nun entweder auf ein Mittel- oder ein Eckfeld; welches in jeder der beiden Kategorieen wir wählen, ist offenbar gleichgültig, und wir haben daher nur folgende 2 Fälle zu unterscheiden:

1) S setzt auf 1. Setzt W jetzt auf 8, so muß S auf 2 setzen, um den sofortigen Sieg von W zu verhindern, und W muß nun auf 3 setzen, S aber auf 7. In den beiden nächsten Zügen zieht W von 8 nach 9 und von 5 nach 6 und siegt.

2) S setzt auf ein Mittelfeld, etwa 2.

Wir geben die Lösung hierfür kurz in leicht verständlicher schematischer Form, wobei ein Accent an einer Zahl bedeuten soll, daß eine Notwendigkeit für die betreffende Wahl vorliegt, und das in der Schachlitteratur übliche Zeichen \sim ausdrückt, daß der betreffende Zug beliebig geschehen kann.

$W.$	$S.$
5	2
7	3'
1'	4'
7—8	\sim
8—9 und siegt.	

So sehen wir, daß W stets siegt. Wird die Spielregel jedoch dahin modifiziert, daß der erste Stein nicht auf das innere Feld gesetzt werden darf, so gestaltet sich das Resultat anders. Nach dem Obigen sieht man, daß es für S am günstigsten sein wird, seinen ersten Stein auf 5 zu setzen. Je nachdem W seine beiden ersten Steine setzt, ergeben sich folgende Fälle:

1) s. Lucas, Récréat. t. II. p. 79.

1) *W* setzt auf 2 gegenüberliegende Mittelfelder (2 und 8):

<i>W.</i>	<i>S.</i>
2	5
8	7
3'	1
~	5—4 und siegt.

2) *W* setzt auf 2 benachbarte Mittelfelder:

<i>W.</i>	<i>S.</i>
2	5
4	9
1'	3
~	5—6 und siegt.

3) *W* setzt auf ein Mittel- und ein benachbartes Eckfeld:

<i>W.</i>	<i>S.</i>
1	5
2	3'
7'	9
~	5—6 und siegt.

4) *W* setzt auf ein Mittel- und ein gegenüberliegendes Eckfeld:

<i>W.</i>	<i>S.</i>
6	5
1	7
3'	9
~	5—8 und siegt.

5) *W* setzt auf zwei gegenüberliegende Eckfelder:

<i>W.</i>	<i>S.</i>
1	5
9	2
8'	7
~	2—3 und siegt.

6) *W* setzt auf 2 benachbarte Eckfelder:

<i>W</i> .	<i>S</i> .
1	5
3	2'
8'	

Bisher ist die Stellung symmetrisch, und wir brauchen daher von den 4 noch leeren Feldern, auf welche *S* seinen dritten Stein setzen kann, nur 2 zu berücksichtigen, ein Mittel- und ein Eckfeld.

Setzt *S* auf 4, so zieht *W*: 8—7, und *S* muß das Mittelfeld verlassen, worauf *W* mit: 1—5 siegt.

S darf also seinen dritten Stein nicht auf 4, sondern muß ihn auf 7 setzen.

W muß jetzt 1—4 ziehen, da sonst *S* mit dem nächsten Zug siegen würde.

S darf jetzt nicht 2—1 ziehen, da dann *W*: 3—2 antworten, *S* damit zum Verlassen des Feldes 5 zwingen und siegen würde. Daher zieht *S*: 5—6 oder 5—9.

Man erkennt leicht, daß bei richtigem Spiel beiderseits weder *W* noch *S* zum Siege gelangen kann.

Wenn also die Besetzung des inneren Feldes durch den ersten Stein verboten ist, so siegt *W* bei korrektem Spiel von *S* niemals mehr, hat es aber noch in der Hand, die Partie unentschieden zu machen, indem er mit seinen beiden ersten Steinen 2 benachbarte Eckfelder besetzt. Allerdings basiert unsere Analyse auf der Annahme, daß *S* seinen ersten Stein auf 5 setzt. Man überzeugt sich aber leicht — ohne daß wir jedoch alle diese Fälle hier durchgehen wollen — daß *S* auch bei anderer Wahl seines ersten Feldes nicht siegen, *W* dagegen dann gleichfalls die Partie stets unentschieden machen kann, wofern nicht eine andere Wahl seitens *S* direkt fehlerhaft, wie z. B. in dem Anfang $\begin{matrix} W & S \\ 1 & 6' \end{matrix}$, wäre und sogar zum Siege von *W* führte. — Die oben hervorgetretene Bevorzugung der Eckfelder vor den mittleren Randfeldern hat offenbar darin ihren Grund, daß ein Eckfeld — bei zwar derselben Anzahl von

Ausgängen wie von einem mittleren Randfeld aus — an 3 der an sich möglichen 8 Mühlen, ein mittleres Randfeld dagegen nur an 2 derselben beteiligt ist.

§ 3. Schaf und Wolf.

Das Spiel wird in Deutschland auf einem gewöhnlichen Schachbrett gespielt mit 4 Steinen einer Farbe, etwa schwarz, den „Schafen“¹⁾, welche auf den schwarzen Feldern der Reihe 1 (in der gewöhnlichen Notation, s. § 1) aufgestellt werden, und einem Stein der anderen Farbe (weifs), dem „Wolfe“, welcher sich auf irgend ein schwarzes Feld stellt. Die Steine bewegen sich ausschliesslich auf schwarzen Feldern, von einem Feld bis zu einem darangrenzenden, und zwar die Schafe nur nach vorn, während der Wolf vor- und rückwärts ziehen darf. Es kommt nun bei dem Spiel darauf an, dafs die Schafe den Wolf fortgesetzt zurücktreiben und schliesslich so einschliessen, dafs er nicht mehr ziehen kann, was bei richtigem Spiel stets gelingt, wie wir zeigen werden, während der Wolf die Partie gewonnen hat, sobald er die Reihe der Schafe durchbricht. Wir werden die Partie der Schafe oder schwarzen Steine kurz mit *S*, die des Wolfes oder weifsen Steins mit *W* bezeichnen.²⁾ An sich ist es offenbar gleichgültig, wer anzieht, da *W* sich ja sein Feld beliebig wählen darf, doch ist es, wenn auch gegen den bei Brettspielen sonst üblichen Brauch, für die Darstellung bequemer, wenn wir *S* stets den Anzug geben. Der Beweis, dafs *S* bei richtigem Spiel stets siegen mufs, ist offenbar erbracht, wenn wir zeigen, dafs alle Steine von *S* für jede Stellung von *W* in die nächste oder übernächste Reihe

1) In Ländern, in denen, wie z. B. in Frankreich, sich das 100-feldrige Damebrett eingebürgert hat, spielt man natürlich das vorliegende Spiel mit 5 Steinen gleicher Farbe, vgl. Lucas, Récr. t. II, p. 92—98, dessen Entwicklungen für uns hier vorbildlich waren.

2) Diese für das Folgende bequeme Abkürzung (*S* für Schwarz und Schafe, *W* für Weifs und Wolf) veranlafste uns zu der obigen Wahl der Farben, obwohl diese gewöhnlich umgekehrt getroffen wird.

vorrücken können, ohne daß W ihre Reihe durchbricht. Denn wenn S bei beliebiger Stellung von W von der Reihe 1 in die Reihe 2 mit allen 4 Steinen vorrücken kann, so muß es ihm auch möglich sein, von der zweiten Reihe aus die dritte Reihe ganz zu besetzen. Allerdings besteht zwischen der ersten und zweiten Reihe insofern eine Lagenverschiedenheit, als in der ersten Reihe das äußerste Feld rechts ein weißes, in der zweiten dagegen ein schwarzes ist u. s. w. Wir brauchen uns aber die Position mit S in der zweiten Reihe nur an dem linken oder rechten Seitenrand des Bretts gespiegelt zu denken und erhalten dann ein Spiegelbild, das sein genaues Analogon unter den Stellungen mit S in der ersten Reihe hat.

Wir unterscheiden nun folgende Fälle:

I. W befindet sich auf einem Felde der vierten oder einer höheren Reihe, etwa auf $d4$; dann zieht S : $c1 - d2$ und, wenn W nach $c3$ geht, erfolgt: $a1 - b2$; geht W nach $e3$, so zieht S : $e1 - f2$. Geht schließlic W weiter zurück oder befand er sich von vornherein in der 5. oder einer höheren Reihe, so rückt S mühelos mit allen 4 Steinen in die zweite Reihe vor. Es verdienen hiernach offenbar nur noch die Fälle Beachtung, in denen W sich auf einem Felde der zweiten oder der dritten Reihe befindet, und diese wollen wir nunmehr einzeln besprechen.

II. W auf $g3$:

S : $c1 - d2$; 1) W : $g3 - h2$.

S : $e1 - f2$; W : $h2 - g3$.

S : $g1 - h2$; und nachher rückt der 4. Stein in die Reihe 2.

— 2) W : $g3 - f2$.

S : $a1 - b2$; W muß zurück nach $e3$ oder $g3$.

S : $e1 - f2$, und nachher zieht S : $g1 - h2$, weil W die Besetzung von Feld $h2$ mit Einschließung büßen würde.

III. W auf $e3$:

S : $c1 - d2$; W : $e3 - f2$, Fortsetzung wie in II 2).

IV. *W* auf *c3*:

S: *g1* — *f2*; 1) *W*: *c3* — *b2*.

S: *e1* — *d2*; *W*: *b2* — *a3* oder *c3*.

S: *a1* — *b2*; *W* nach *b4* oder *d4*.

Geht *W* nach *b4*, so zieht *S*: *d2* — *c3* und besetzt ungehindert die Reihe 3 durch: *c1* — *d2* — *e3*; *f2* — *g3*; *b2* — *a3*. Geht *W* aber nach *d4*, so zieht *S*: *d2* — *e3*; *c1* — *d2* — *c3*; *f2* — *g3*; *b2* — *a3* und hat die Reihe 3 inne.

— 2) *W*: *c3* — *d2*.

S: *f2* — *e3*; *W*: *d2* — *c3*.

S: *a1* — *b2*; *W*: *c3* — *b4* oder *d4* (auf *d2* würde *W* eingeschlossen werden).

S: *c1* — *d2*; *W* nach *c3* oder *a3*.

S zieht: *e1* — *f2*; *d2* — *c3*; *f2* — *g3*; *b2* — *a3*.

V. *W* auf *a3*:

S: *a1* — *b2* und rückt ungehindert in die Reihe 2 ein.

VI. *W* befindet sich auf *h2*:

S: *e1* — *f2*; *W*: *h2* — *g3*.

S: *c1* — *d2*; *W* kann nach *h2* nicht gehen, da dort Einschließung droht, und kann daher nicht mehr verhindern, daß *S* in den nächsten beiden Zügen die ganze Reihe 2 besetzt.

VII. *W* befindet sich auf *f2*:

S: *c1* — *d2*.

Ob *W* nun *f2* — *g3* oder *f2* — *e3* zieht, *S* zieht *e1* — *f2* und besetzt ohne Schwierigkeit die Reihe 2, da auf *h2* für *W* wieder Einschließung droht.

VIII. *W* auf *d2*:

S: *a1* — *b2*. Zieht 1) *W*: *d2* — *c3*, so antwortet *S*: *c1* — *d2* und besetzt ohne Schwierigkeit die Reihe 2.

Zieht 2) *W*: *d2* — *e3*, so folgt auch *S*: *c1* — *d2*.

Geht *W* nun zurück, rückt *S* in die Reihe 2 ein.

Zieht *W* aber: *e3* — *f2*, so *S*: *b2* — *c3*.

Zieht nun α) W : $f2 - g3$, so S : $e1 - f2$. Nach $h2$ kann W wegen der drohenden Einschließung nicht gehen. Geht W jetzt nach $f4$, so folgt S : $g1 - h2$, und wir haben dieselbe Position, wie in Fall IV nach dem ersten Zuge von S . Geht W nach $h4$, so zieht S : $f2 - g3$ und dann: $g1 - f2 - e3$; $c3 - b4$; $d2 - c3$. In diesen 5 Zügen kann nun W entweder bis in die Reihe 7 gegangen sein, in welchem Falle S anstandslos die Reihe 4 besetzt, oder aber W ist auf ein Feld der Reihe 5, nämlich $c5$, $e5$ oder $g5$, gegangen. Befindet sich W auf $g5$, so zieht S jetzt: $e3 - f4$ und, wenn W auf $c5$ steht: $c3 - d4$ und rückt in beiden Fällen darauf in die Reihe 4 ein. Befindet sich aber W auf $e5$, so haben wir offenbar wieder dieselbe Position wie zu Anfang dieses Falles nach den Zügen: S : $a1 - b2$; W : $d2 - e3$.

Zieht β) W : $f2 - e3$, so antwortet S : $g1 - f2$. Je nachdem nun W nach $d4$ oder $f4$ geht, ergeben sich folgende 2 Fortsetzungen:

β_1) — W : $e3 - f4$.

S : $f2 - g3$; W am besten: $f4 - e3$.

S : $e1 - f2$; W am besten: $e3 - d4$.

S : $f2 - e3$; W : $d4 - c5$ oder $e5$.

S : $c3 - b4$; W : am besten nach $d4$.

S : $d2 - c3$; W : $d4 - c5$ oder $e5$.

S : $c3 - d4$ und rückt, wenn W auf $c5$ steht, ungehindert in Reihe 4 ein; steht W aber auf $e5$, so haben wir wieder die Position wie zu Anfang unseres Falles nach dem zweiten Zuge von S .

β_2) — W : $e3 - d4$.

S : $f2 - e3$, und ob nun W nach $c5$ oder $e5$ geht, S kommt zu derselben Stellung wie unter α), indem der Stein $e1$ nach $g3$, $c3$ nach $b4$, $d2$ nach $c3$ kommt. Nach diesen 4 Zügen befindet sich W entweder in der Reihe 7 oder auf einem Felde der Reihe 5; diese Positionen sind uns aber schon unter α) vorgekommen mit Ausnahme des sehr leicht zu erledigenden Falles, daß W auf $a5$ steht.

IX. *W* auf *b2*:

S: *e1* — *d2*; 1) *W*: *b2* — *a3*; *S*: *a1* — *b2*.

W: *a3* — *b4*; *S*: *d2* — *c3*.

S kann jetzt ungehindert den Stein *c1* auf das Feld *e3* und *g1* nach *g3* bringen, schliesslich *b1* nach *a3*, welches letzteres Feld *W* wegen der dort drohenden Einschliessung nicht besetzen darf; damit hat *S* die Reihe 3 in Besitz.

— 2) *W*: *b2* — *c3*; *S*: *a1* — *b2*.

W: *c3* — *b4*; Forts. wie in 1)

oder *W*: *c3* — *d4*; *S*: *d2* — *e3*, und *S* besetzt ohne weitere Schwierigkeit die Reihe 3.

Kapitel VIII.

Das Nonnen- oder Einsiedler-(Solitär-)spiel.

*Optarem, ut aliquis omnis generis ludos
mathematice tractaret et tam regularem seu
legum rationem redderet quam artificia pri-
maria traderet.* LEIBNIZ.

§ 1. Spielregel. Notation.

Über den Ursprung des Spiels ist Sicheres nicht bekannt.¹⁾ Unter den verschiedenen Formen, in denen es auftritt, überwiegt in Deutschland die eines Kastens, dessen Deckel 33 Löcher aufweist, durch welche Holzpföcke hindurchgesteckt werden können, wobei mindestens ein Loch stets leer gelassen wird. Die Löcher sind symmetrisch und zwar so, wie Figur 1 dies zeigt, angeordnet.

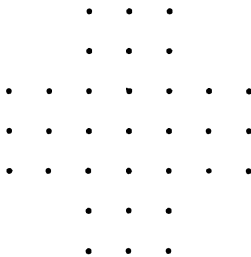


Fig. 1.

Die verschiedenen Löcher werden wir ähnlich wie die Felder des Schachbretts im vorigen Kapitel unterscheiden und dementsprechend auch jedes Loch fortan quadratisch darstellen, so daß wir auch promiscue von „Löchern“ und „Feldern“ sprechen werden. Wir tragen in jedes Loch gleich seine Notation ein (s. Fig. 2), wobei die erste Ziffer immer die Vertikalreihe oder „Kolonne“, von

1) Es sei der Kuriosität halber beiläufig bemerkt, daß das Spiel trotz seines unzweifelhaften Alters (vgl. z. B. den am Ende von § 1 erwähnten Brief Leibniz) noch im Jahre 1887 (25. Sept.) ein deutsches Reichspatent (Patentklasse 77, Nr. 42 919) erhielt.

links nach rechts gerechnet, die zweite die Horizontalreihe oder „Zeile“, von unten nach oben gerechnet, angeibt.

Die einzige Spielregel besteht darin, daß wenn von 3 in horizontaler oder vertikaler Reihe gelegenen Löchern 2 benachbarte mit einem Pflock versehen sind, während das dritte leer ist, alsdann der Pflock aus dem entfernteren der beiden besetzten Löcher in das leere gesteckt werden darf, während aus dem mittleren Loch, das hierbei übersprungen wird, der Pflock herausgezogen und beiseite gelegt wird. Diese Operation, welche stets das Verschwinden eines Pflockes und für einen anderen eine Platzänderung zur Folge hat, nennen wir kurz einen „Zug“, so daß also, wenn zu Anfang z. B. nur das Loch 44 leer ist, nur einer der 4 Züge

		37	47	57		
		36	46	56		
15	25	35	45	55	65	75
14	24	34	44	54	64	74
13	23	33	43	53	63	73
		32	42	52		
		31	41	51		

Fig. 2.

$\frac{24}{44}$; $\frac{46}{44}$; $\frac{64}{44}$; $\frac{42}{44}$ möglich ist, wo in dieser auch weiterhin stets gebrauchten Bezeichnung der Züge in Form von Brüchen der Zähler das Loch angiebt, aus dem ein Pflock fortgenommen, und der Nenner dasjenige, in das er gesteckt wird. Zähler und Nenner eines solchen Bruches stimmen natürlich immer entweder in den ersten oder in den letzten Ziffern überein, während die beiden nicht übereinstimmenden Ziffern sich um 2 unterscheiden; die zwischen den beiden letzteren liegende Zahl zusammen mit der im Zähler und Nenner gleicherweise vorkommenden geben dann das Loch, über das hinweggesetzt wird, aus dem also ein Pflock verschwindet, in unserem Falle bezw. 34; 45; 54; 43.

Die Aufgabe des Spiels besteht gewöhnlich darin, aus 32 besetzten Löchern der Reihe nach alle Pflöcke bis auf einen fortzuschaffen, wobei das zu Anfang leere Loch gewöhnlich das mittlere (44) ist, jedoch auch ein anderes sein kann und wobei das dem letzten Pflock verbleibende Loch unter Umständen auch vorgeschrieben ist. Selbstverständlich brauchen aber zu Anfang nicht alle 32 Löcher besetzt zu sein, sondern etwa nur ein Teil der-

selben, so daß vielleicht eine symmetrische Figur, ein Quadrat, ein Kreuz oder dergleichen, gebildet wird, und die Aufgabe ist sonst dieselbe; oder aber es wird auch verlangt, nicht alle Pflöcke zu entfernen, sondern nur so viele, daß eine bestimmte Figur übrig bleibt, so daß schließlichs als allgemeinste Aufgabe sich die ergibt: *eine bestimmte vorgeschriebene Anfangsfigur in eine bestimmte vorgeschriebene Endfigur überzuführen*, eine Aufgabe, die allerdings, wie leicht ersichtlich, keineswegs stets lösbar ist.

Leibniz, welcher in einem an de Montmort gerichteten Briefe vom 17. I. 1716 über unser Spiel spricht, hat die Spielregel umgekehrt, indem er sie dahin faßt, daß ein Pflöck über ein benachbartes leeres Loch hinweg in ein zweites leeres gesteckt wird und das übersprungene dann auch mit einem Pflöck ausgefüllt wird; von dieser Spielregel, durch welche natürlich mit jedem Zug die Zahl der Pflöcke um 1 vermehrt wird und für welche die Aufgabe des Spiels natürlich in erster Linie darin besteht, auf einem Brett mit anfänglich nur einem Pflöck successive alle Löcher bis auf eins auszufüllen, wird auch weiter unten noch die Rede sein. Wir werden dort einen solchen Zug nach der Leibniz'schen Spielregel kurz einen „inversen“ Zug nennen im Gegensatz zu den gewöhnlichen oder „direkten“.

§ 2. Lösungen von Busschop und Reifs.

Um in das Wesen des Spiels zunächst etwas einzuführen, besprechen wir eine Anzahl von Aufgaben, in denen nur ein Teil des Brettes besetzt ist und verlangt wird, die Pflöcke bis auf einen zu entfernen. Diese Aufgaben sind einem Werke von Busschop¹⁾ entnommen. Die in den verschiedenen Figuren mit ihrer Notation angegebenen Felder sind zu Anfang besetzt, der übrige leere Teil der Bretter kann nach Fig. 2 leicht hinzugedacht werden.

1) Paul Busschop, „Recherches sur le jeu du solitaire“ Brügge 1879, herausgeg. v. J. Busschop, p. 331, 332, 337, 338.

I. Das Kreuz aus 9 Pföcken.

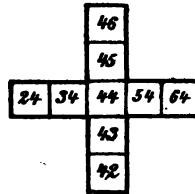


Fig. 3.

Lösung: $\frac{43}{41}$; $\frac{45}{43}$; $\frac{24}{44}$; $\frac{44}{42}$; $\frac{64}{44}$; $\frac{41}{43}$; $\frac{43}{45}$; $\frac{46}{44}$

II. Das Dreieck.

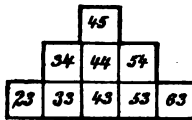


Fig. 4.

Lösung: $\frac{53}{55}$; $\frac{55}{35}$; $\frac{33}{53}$; $\frac{63}{43}$; $\frac{44}{42}$; $\frac{35}{33}$; $\frac{23}{43}$; $\frac{42}{44}$

III. Das Kreuz.

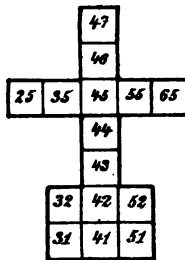


Fig. 5.

Lösung: $\frac{31}{33}$; $\frac{51}{53}$; $\frac{43}{63}$; $\frac{41}{43}$; $\frac{33}{53}$; $\frac{63}{43}$, von hier ab die Figur der Aufgabe I.

IV. Die Pyramide.

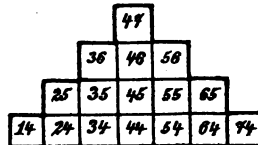


Fig. 6.

Lösung: $\frac{55}{53}$; $\frac{74}{54}$; $\frac{53}{55}$; $\frac{55}{57}$; $\frac{57}{37}$; $\frac{35}{33}$; $\frac{14}{34}$; $\frac{33}{35}$; $\frac{36}{56}$; $\frac{44}{46}$; $\frac{56}{36}$;
 $\frac{25}{45}$; $\frac{37}{35}$; $\frac{35}{55}$; $\frac{65}{45}$



Fig. 7.

Selbstverständlich sind aber keineswegs alle Aufgaben dieser Art lösbar; wir beschränken uns in dieser Hinsicht darauf, nur auf den einfachen Fall hinzuweisen, daß anfänglich nur 3 Felder von der in Fig. 7 angegebenen gegenseitigen Lage besetzt sind, gleichgültig wo auf dem Brett diese Figur liegt.

Gewöhnlich besteht die Aufgabe bei unserem Spiel jedoch, wie schon oben gesagt, darin, daß zu Anfang alle 32 Pflöcke in den Löchern stecken, während ein beliebig vorgeschriebenes Loch, von uns weiterhin stets als das „Anfangsloch“ bezeichnet, leer ist, und nun der Reihe nach alle Pflöcke bis auf einen entfernt werden sollen, welcher letzterer dann in einem gleichfalls vorgeschriebenen Loch, weiterhin kurz „Schlusfloch“ genannt, stecken bleiben soll. Um auch diese Aufgabe, von der fortan immer nur kurz als der „Aufgabe des Spiels“ die Rede sein wird, auseinanderzusetzen, reproduzieren wir im folgenden 16 solcher Aufgaben mit Lösungen, welche Reifs, der Begründer einer mathematischen Theorie unseres Spiels, gegeben hat.¹⁾

I. Anfangsloch: 44; Schlusfloch: 44.

$\frac{64}{44}$	$\frac{56}{54}$	$\frac{44}{64}$	$\frac{52}{54}$	$\frac{73}{53}$	$\frac{75}{73}$	$\frac{43}{63}$	$\frac{73}{53}$	$\frac{54}{52}$	$\frac{35}{55}$	$\frac{65}{45}$	$\frac{15}{35}$	$\frac{45}{25}$	$\frac{37}{35}$	$\frac{57}{37}$	$\frac{34}{36}$
$\frac{37}{35}$	$\frac{25}{45}$	$\frac{46}{44}$	$\frac{23}{43}$	$\frac{31}{33}$	$\frac{43}{23}$	$\frac{51}{31}$	$\frac{52}{32}$	$\frac{31}{33}$	$\frac{14}{34}$	$\frac{34}{32}$	$\frac{13}{33}$	$\frac{32}{34}$	$\frac{34}{54}$	$\frac{64}{44}$	

II. Anfangsloch: 44; Schlusfloch: 74.

Wie I, nur statt des letzten Zuges: $\frac{54}{74}$.

III. Anfangsloch: 74; Schlusfloch: 74.

Der erste Zug von II ist durch $\frac{54}{74}$ zu ersetzen.

1) Reifs, „Beiträge zur Theorie des Solitärspiels“. Crelle's Journ. Bd. 54. 1857, p. 376—379. Die Bezeichnung der Felder bei Reifs ist eine andere; wir haben die praktischere Lucas'sche acceptiert.

IV. Anfangsloch: 74; Schlußloch: 47.

$$\frac{54}{74}, \frac{52}{54}, \frac{44}{64}, \frac{73}{53}, \frac{74}{54}, \frac{54}{52}, \frac{51}{53}, \frac{31}{51}, \frac{32}{52}, \frac{43}{53}, \frac{51}{43}, \frac{63}{43}, \frac{34}{32}, \frac{13}{33}, \frac{15}{13}, \frac{43}{23},$$

$$\frac{13}{33}, \frac{32}{34}, \frac{56}{54}, \frac{75}{55}, \frac{54}{56}, \frac{57}{55}, \frac{37}{57}, \frac{36}{56}, \frac{45}{65}, \frac{57}{55}, \frac{65}{45}, \frac{24}{44}, \frac{44}{46}, \frac{25}{45}, \frac{45}{47}.$$

V. Anfangsloch: 74; Schlußloch: 14.

Zunächst die ersten 24 Züge von IV, dann $\frac{34}{36}, \frac{55}{35}, \frac{57}{55}$,

$$\frac{25}{45}, \frac{55}{35}, \frac{36}{34}, \frac{34}{14}.$$

VI. Anfangsloch: 54; Schlußloch: 54.

$$\frac{56}{54}, \frac{75}{55}, \frac{54}{56}, \frac{74}{54}, \frac{53}{55}, \frac{73}{53}, \frac{43}{63}, \frac{51}{53}, \frac{63}{43}, \frac{33}{53}, \frac{41}{43}, \frac{53}{33}, \frac{23}{43}, \frac{31}{33}, \frac{43}{23}, \frac{13}{33},$$

$$\frac{15}{13}, \frac{25}{23}, \frac{34}{32}, \frac{13}{33}, \frac{32}{34}, \frac{45}{25}, \frac{37}{35}, \frac{57}{37}, \frac{34}{36}, \frac{37}{35}, \frac{25}{45}, \frac{56}{36}, \frac{44}{46}, \frac{36}{56}, \frac{56}{54}.$$

VII. Anfangsloch: 54; Schlußloch: 57.

Der letzte Zug von VI ist durch $\frac{55}{57}$ zu ersetzen.

VIII. Anfangsloch: 57; Schlußloch: 57.

Der erste Zug von VII ist durch $\frac{55}{57}$ zu ersetzen.

IX. Anfangsloch: 54; Schlußloch: 24.

Die ersten 27 Züge von VI, alsdann $\frac{56}{54}, \frac{54}{34}, \frac{46}{44}, \frac{44}{24}$.

X. Anfangsloch: 57; Schlußloch: 24.

Der erste Zug von IX ist zu ersetzen durch $\frac{55}{57}$.

XI. Anfangsloch: 57; Schlußloch: 51.

Zunächst die ersten 6 Züge von X; die 24 folgenden leiten sich aus den entsprechenden von VI durch Spiegelung an der horizontalen Mittellinie her; der letzte Zug ist $\frac{53}{51}$.

XII. Anfangsloch: 24; Schlußloch: 24.

$$\frac{44}{24}, \frac{36}{34}, \frac{15}{35}, \frac{34}{36}, \frac{37}{35}, \frac{57}{37}, \frac{56}{36}, \frac{45}{25}, \frac{37}{35}, \frac{25}{45}, \frac{32}{34}, \frac{13}{33}, \frac{34}{32}, \frac{31}{33}, \frac{51}{31}, \frac{52}{32},$$

$$\frac{43}{23}, \frac{31}{33}, \frac{23}{43}, \frac{54}{56}, \frac{75}{55}, \frac{73}{75}, \frac{45}{65}, \frac{75}{55}, \frac{56}{54}, \frac{64}{44}, \frac{44}{42}, \frac{63}{43}, \frac{42}{44}, \frac{14}{34}, \frac{44}{24}.$$

XIII. Anfangsloch: 55; Schlußloch: 55.

$$\frac{53}{55}; \frac{73}{53}; \frac{75}{73}; \frac{65}{63}; \frac{52}{54}; \frac{73}{53}; \frac{54}{52}; \frac{51}{53}; \frac{31}{51}; \frac{32}{52}; \frac{43}{63}; \frac{51}{53}; \frac{63}{43}; \frac{45}{65}; \frac{57}{55}; \frac{65}{45};$$

$$\frac{35}{55}; \frac{47}{45}; \frac{55}{35}; \frac{25}{45}; \frac{37}{35}; \frac{45}{25}; \frac{15}{35}; \frac{13}{15}; \frac{23}{25}; \frac{34}{36}; \frac{15}{35}; \frac{36}{34}; \frac{33}{53}; \frac{34}{54}; \frac{53}{55}.$$

XIV. Anfangsloch: 55; Schlußloch: 52.

Der letzte Zug von XIII ist zu ersetzen durch $\frac{54}{52}$.

XV. Anfangsloch: 52; Schlußloch: 52.

Der erste Zug von XIV ist zu ersetzen durch $\frac{54}{52}$.

XVI. Anfangsloch: 52; Schlußloch: 25.

Die 28 ersten Züge von XV, dann $\frac{43}{23}; \frac{44}{24}; \frac{23}{25}$.

§ 3. Symmetrie und Reziprozität von Lösungen.

Die mathematische Theorie unseres Spiels, mit der wir uns jetzt beschäftigen wollen, wurde, wie schon gesagt, von Reifs¹⁾ begründet und dann von Hermary²⁾ weiter ausgebaut. Vor allem wird es sich um die Frage handeln, bei welchen Kombinationen von Anfangs- und Schlußloch die „Aufgabe unseres Spiels“ (s. S. 98) lösbar ist und bei welchen nicht. Da entsteht nun zunächst die Vorfrage nach der Anzahl der wesentlich verschiedenen Kombinationen überhaupt. Beachtet man, daß die Figur des Bretts bei Drehung um einen oder mehrere rechte Winkel mit sich selbst zur Deckung kommt und ferner in bezug auf die vertikale Mittellinie symmetrisch ist, so daß also bei Spiegelung an derselben die eine Hälfte mit der anderen sich deckt, so sieht man, daß die bei diesen Spiegelungen und Drehungen zusammenfallenden Felder offenbar für

1) l. c. p. 344—379. Eine französische Bearbeitung dieser Reifs'schen Abhandlung gab Ruchonnet in Catalan's Nouvelle correspondance mathématique t. III. Brüssel 1877.

2) Hermary „Sur le jeu du solitaire“ Assoc. franç. pour l'avanc. des sc. Congrès de Montpellier VIII, 1879, p. 284—294.

unsere Aufgabe aequivalent sind und sich danach folgende Gruppen von unter einander aequivalenten Feldern ergeben:

- 1) 13; 15; 37; 57; 75; 73; 51; 31.
- 2) 14; 47; 74; 41.
- 3) 25; 36; 56; 65; 63; 52; 32; 23.
- 4) 24; 46; 64; 42.
- 5) 35; 55; 53; 33.
- 6) 34; 45; 54; 43.
- 7) 44.

Noch eine weitere Beziehung verdient herangezogen zu werden, um die Anzahl der wesentlich verschiedenen Aufgaben weiter zu reduzieren. Denken wir uns nämlich eine Aufgabe gelöst und die Lösung in der Form dargestellt wie bei den in § 2 behandelten Aufgaben, so würde, sobald in diesem Schema die Reihenfolge aller Brüche umgekehrt und jeder einzelne in seinen reziproken verkehrt würde, dieses neue Schema ein Verfahren angeben, um bei Anwendung von „inversen“ Zügen nach der oben (S. 96) angegebenen Leibniz'schen Spielregel aus dem früheren Schlufsloch als einzig besetztem Loch das System der 32 Pflöcke herzustellen, wobei das frühere Anfangsloch jetzt leer bleiben würde; denn jeder inverse Zug hebt die Wirkung des entsprechenden „direkten“ wieder auf, die Anfangsstellung muß sich daher wieder aus der Schlufsstellung ergeben. Ein Umkehren jedes einzelnen Bruches war nötig, da jeder Zug jetzt in der umgekehrten Richtung erfolgt wie bei dem direkten Verfahren. Denken wir uns nun diese Lösung nach Leibniz'schem Verfahren in ihren successiven Stellungen figürlich dargestellt und in jeder dieser Figuren an die Stelle von besetzten Löchern leere und umgekehrt gesetzt, so kommen wir offenbar zu einer Lösung nach dem direkten Verfahren, und zwar ist das Anfangsloch dieser Lösung offenbar das Schlufsloch derjenigen, von der wir ausgingen, und vice versa. Nur müssen wir dann, wenn wir unserer alten Schreibweise treu bleiben wollen, in den Zähler eines Bruches das besetzte Loch, in den Nenner das leere,

nach welchem gezogen wird, zu schreiben, — in der schematischen Darstellung der Lösung nochmals von allen Brüchen das Reziproke nehmen, so daß wir also zu den anfänglichen Brüchen zurückkehren und nur ihre Reihenfolge unter einander umgekehrt bleibt. Wir sehen also, daß die Aufgabe mit dem Anfangsloch a und dem Schlußloch b zugleich mit der mit dem Anfangsloch b und dem Schlußloch a gelöst ist; 2 solche Aufgaben wollen wir „reziproke“ nennen.

§ 4. Erweiterte Spielregel Reifs'. Kriterien der Unlösbarkeit.

Nach diesen Vorbemerkungen, welche uns später in den Stand setzen werden, die Zahl der wesentlich verschiedenen Fälle auf eine geringe Anzahl zu reduzieren, wenden wir uns der ingeniosen Methode zu, welche Reifs anwandte, um gewisse Unmöglichkeiten nachzuweisen. Reifs that dies, indem er die Spielregeln erweiterte¹⁾ und nun nachwies, daß auch bei diesen erweiterten Regeln gewisse Unmöglichkeiten bestehen, welche dann a fortiori in dem Falle der beschränkteren Regeln bestehen müssen. Diese Erweiterungen lauten in der durch Hermary²⁾ vervollkommeneten Form folgendermaßen:

1) Das Spielbrett soll sich nach allen Richtungen hin ins Unendliche erstrecken, die Anzahl der Löcher also unbegrenzt sein.

2) Es ist gestattet, beliebig direkte und inverse Züge zu thun.

3) Es ist erlaubt, daß mehrere Pflöcke in einem Loche stecken, sowie auch, daß ein leeres Loch ein oder mehrere Pflöcke entleiht, wenn es dieselben nur später zurückerstattet.

4) Jeder Zug ist gestattet, auch wenn das Feld, nach welchem gezogen wird, bereits besetzt ist, dorthin also 2 oder mehrere Pflöcke kommen. Ein direkter Zug ist gestattet, auch wenn das zwischenliegende Feld leer ist; dasselbe muß dann

1) l. c. p. 347 ff.

2) s. Hermary, l. c. p. 285.

nur auf grund von 3) einen Pflock leihen, der allerdings dann sofort durch den Zug verloren geht, und denselben dann später zurückerstatten; ein inverser Zug ist auch dann gestattet, wenn das zwischenliegende Feld besetzt ist.

Diese erweiterten Spielregeln ergeben folgende Konsequenzen:

Satz I: *Einem beliebigen Loch kann man ohne jede sonstige Änderung 2 Pflöcke nehmen oder hinzufügen.*

Ist *B* das betreffende Loch und *A* und *C* die beiden Nachbarlöcher entweder in derselben Zeile oder derselben Kolonne (Randfelder giebt es ja bei unbegrenztem Brett nicht), so zieht man, um *B* zwei Pflöcke zu nehmen, von *A* nach *C* „direkt“ und dann von *C* nach *A* „direkt“ und, um *B* 2 Pflöcke hinzuzufügen, ebenso, nur beide Male „invers“. Ob *A* und *C* leer oder besetzt sind, ist hier auf grund von 3) und 4) gleichgültig.

Satz II: *Von 3 aufeinanderfolgenden Löchern derselben Zeile oder Kolonne kann man stets je einen Pflock fortnehmen.*

Man braucht nur von dem einen äusseren Feld einen direkten Zug nach dem anderen äusseren zu thun und dann in dem letzteren auf grund von Satz I die Zahl der Pflöcke um 2 zu vermindern. Natürlich kann man auch ebensogut den 3 Feldern je einen Pflock zugeben.

Satz III: *Man kann stets einen Pflock 2 Felder derselben Zeile oder Kolonne überschreiten lassen und auf das dritte Feld setzen ohne jede sonstige Änderung.*

Sind nämlich *A*, *B*, *C*, *D* 4 aufeinanderfolgende Felder derselben Zeile oder Kolonne, so thue man von *A* aus einen inversen Zug nach *C*, wodurch ein Pflock von *A* nach *C* wandert und die Zahl der Pflöcke in *B* um einen wächst. Zieht man nun von *B* nach *D* direkt, so ist die Zahl der Pflöcke in *B* und *C* wieder die ursprüngliche, während sich die in *D* um 1 vermehrt, so dafs also im ganzen ein Pflock von *A* nach *D* gewandert ist.

Wegen der grossen Bedeutung, die der Satz III im folgenden erlangen wird, führen wir für 2 Felder von der gegen-

seitigen Lage der eben betrachteten Felder A und D eine besondere Bezeichnung ein und nennen sie „kongruent“.¹⁾ Der Effekt jedes Zuges in bezug auf die Anzahl der Pflöcke ist bei der erweiterten Spielregel der, daß von 3 aufeinanderfolgenden Feldern das mittlere eine Vermehrung oder Verminderung um einen Pflock, von den beiden äußeren das eine eine Vermehrung, das andere aber eine Verminderung um je einen Pflock erfährt, so daß sich also für jedes der 3 Felder die Anzahl der Pflöcke um ± 1 ändert.

Auf grund von Satz III ergibt sich nun zunächst, daß man alle Pflöcke auf ein beliebiges Quadrat von 9 Feldern bringen kann. Die so erhaltene Stellung sei

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}$$

Dieses Quadrat werde nun durch inverse Züge übergeführt in eins von 4 Feldern, indem wir zunächst

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{11} + \varepsilon_{13} & \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} & 0 \\ \varepsilon_{21} + \varepsilon_{23} & \varepsilon_{22} + \varepsilon_{23} & 0 \\ \varepsilon_{31} + \varepsilon_{33} & \varepsilon_{32} + \varepsilon_{33} & 0 \end{vmatrix}$$

und dann $\begin{vmatrix} \varepsilon_{11} + \varepsilon_{13} + \varepsilon_{31} + \varepsilon_{33} & \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13} + \varepsilon_{32} + \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{21} + \varepsilon_{23} + \varepsilon_{31} + \varepsilon_{33} & \varepsilon_{22} + \varepsilon_{23} + \varepsilon_{32} + \varepsilon_{33} \end{vmatrix}$

erhalten. Auf grund von Satz I kann nun die Anzahl der Pflöcke in jedem der 4 Felder auf 1 oder 0 reduziert werden. Diese Stellung nennen wir dann kurz die „reduzierte“ Stellung. Es seien nun mit A und B irgend 2 Stellungen des Spiels bezeichnet, welche auf grund der erweiterten Spielregel in einander überführbar sind, d. h. durch Ausführung einer gewissen Anzahl von Zügen geht A in B über und umgekehrt. Führen wir nun A und B in ihre bezüglichen „reduzierten“

1) Die Bedeutung der „kongruenten“ Felder zeigte sich auch schon in den Reifs'schen Lösungen des § 2 (S. 98—100); so erkennt man dort die Fälle I, II, III z. B. als nur unwesentlich verschieden lediglich deshalb, weil sowohl ihre Anfangs-, wie ihre Schluslöcher kongruent sind.

Stellungen mit bezug auf dasselbe Quadrat des Bretts über, so müssen diese reduzierten Stellungen identisch sein, weil, wie oben angemerkt, der Effekt jedes Zuges der ist, daß die Anzahlen der Pföcke in 3 aufeinanderfolgenden Feldern, d. h. also 3 Größen ε , welche entweder in dem ersten oder in dem zweiten Index übereinstimmen, sich um ± 1 ändern, eine Änderung, welche für jedes der 4 Felder unseres Quadrats 0 oder ± 2 ausmacht, da dort immer in jedem Glied gerade 2 der ε in dem ersten resp. letzten Index übereinstimmen; eine Änderung um 2 ist jedoch (s. Satz I) belanglos. Wir haben damit zunächst ein wichtiges Unterscheidungsmerkmal für wesentlich verschiedene Stellungen bekommen und formulieren dies folgendermaßen:

Theorem I: Alle auf grund der erweiterten Spielregel in einander überführbaren Stellungen ergeben mit bezug auf dasselbe Quadrat von 4 Feldern die gleiche „reduzierte“ Stellung, und umgekehrt sind irgend 2 Stellungen, deren „reduzierte“ Stellungen in bezug auf dasselbe 4-feldrige Quadrat des Bretts gleich sind, nach der erweiterten Spielregel in einander überführbar.

Die gleich mit angegebene Umkehrung folgt natürlich einfach auf grund der Überlegung, daß sich aus der reduzierten Stellung auch umgekehrt die ursprüngliche auf grund der erweiterten Spielregel herleiten lassen muß. — Falls sich aus irgend einer Stellung das eine Mal das eine, das andere Mal das andere Schlußloch ergibt, so müssen auch diese beiden Schlußstellungen dieselbe reduzierte Stellung besitzen, d. h. die Schlußlöcher müssen kongruent sein. Wir dürfen also sagen:

Zusatz I: Die verschiedenen Schlußlöcher, welche aus derselben Anfangsstellung bei verschiedenen Lösungen resultieren, müssen einander kongruent sein.

Zusatz II: Wenn für eine gegebene Stellung ein bestimmtes Loch als Schlußloch unmöglich ist, so gilt dies auch von jedem ihm kongruenten Schlußloch.

Zusatz III: Wenn mit einem bestimmten Loch als Anfangsloch die Aufgabe überhaupt unlösbar ist, so ist sie es auch, wenn das Anfangsloch irgend ein dem ersteren kon-

gruentes ist; diese Löcher sind dann auch als Schlupflöcher unmöglich.

Da auf den 4 Feldern des Quadrats der reduzierten Stellung sich je 0 oder 1 Pflöcke befinden, so sind hiernach offenbar $4^2 = 16$ verschiedene reduzierte Stellungen möglich; diese ordnen sich wieder, wie folgt, in 4 Klassen:

- I. Kl.: $\begin{vmatrix} 00 \\ 00 \end{vmatrix}$
- II. Kl.: $\begin{vmatrix} 00 \\ 10 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 00 \\ 01 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 01 \\ 00 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 10 \\ 00 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 00 \\ 11 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 11 \\ 00 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 10 \\ 10 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 01 \\ 01 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 11 \\ 11 \end{vmatrix}$
- III. Kl.: $\begin{vmatrix} 11 \\ 01 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 10 \\ 11 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 01 \\ 10 \end{vmatrix}$
- IV. Kl.: $\begin{vmatrix} 01 \\ 11 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 11 \\ 10 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 10 \\ 01 \end{vmatrix}$

Zu derselben Klasse gehören dabei diejenigen Typen, welche in solcher Beziehung zu einander stehen, daß der eine an die Stelle des anderen treten kann, wenn auf dem Brett das Quadrat der 4 Felder anders gewählt wird, wie man durch Verlegung des betreffenden Quadrats, d. h. durch Anwendung der Spielregel auf je eine der horizontalen oder vertikalen Reihen leicht erkennt. Hiernach gelangen wir dazu, auch reduzierte Stellungen auf verschiedenen Quadraten zu vergleichen, und dürfen auf grund von Theorem I offenbar folgendes allgemeinere Kriterium der Unlösbarkeit aufstellen:

Theorem II: Irgend 2 Stellungen sind auch bei erweiterter Spielregel nicht in einander überführbar, wenn ihre mit bezug auf 2 ganz beliebige Quadrate reduzierten Stellungen nicht derselben „Klasse“ angehören.¹⁾

Es braucht kaum erwähnt zu werden, daß umgekehrt aus der Zugehörigkeit der reduzierten Stellungen zu derselben Klasse noch keineswegs die Überführbarkeit der betreffenden ursprünglichen Stellungen in einander folgt.

1) Diese Herrn Hermary gehörenden Untersuchungen sind von ihm auch auf eine allgemeinere Spielform, ein Solitärspiel n ter Ordnung, d. h. ein solches, bei dem immer über je n Felder hinweggesetzt und dabei diese n geleert werden, ausgedehnt (l. c. p. 293 u. 294).

§ 5. Das Solitärspiel mit 33 Löchern.

Nach diesen allgemeineren Betrachtungen kehren wir zu unserem bestimmten Fall eines Brettes von 33 Feldern mit der beschränkteren Spielregel zurück, indem wir schliessen dürfen, daß dort, wo sich vorher bei gröfserer Allgemeinheit und Spielfreiheit Unlösbarkeit ergeben hatte, diese jetzt a fortiori besteht.

Auf grund der zu Anfang des § 3 besprochenen Symmetrieverhältnisse dürfen wir uns darauf beschränken, aus jeder der dort angegebenen 7 Gruppen ein Feld als Anfangsfeld zu wählen, es seien dies:

57, 74, 52, 24, 55, 54, 44.

Nun zeigen uns die Aufgaben VIII, III, XV, XII, XIII, VI und I des § 2, S. 98—100 mit ihren dort angegebenen Reifs'schen Lösungen, daß jedes unserer 7 Felder zugleich Anfangsloch und Schlußloch sein kann; daraus folgt dann aber auf grund von § 4, Zusatz I zu Theorem I:

Bei beliebigem Anfangsloch muß das Schlußloch demselben jedenfalls kongruent sein; denn selbst bei der erweiterten Spielregel wäre dies eine unerläßliche Bedingung für die Lösbarkeit, um so mehr also hier.

Es entsteht jetzt nur noch die umgekehrte Frage, ob denn nun auch jedes dem Anfangsloch kongruente Loch Schlußloch sein darf, und wir erhalten hierfür mit Weglassung der bereits erledigten Fälle desselben Anfangs- und Schlußloches offenbar folgende verschiedene Möglichkeiten, für welche wir in nebenstehender Tabelle kurz immer gleich ihre Erledigung angeben:

No.	Anfangsloch	Schlußloch	
1.	57	54	reziprok zu VII ¹⁾
2.	57	51	s. XI
3.	57	24	s. X

1) Die römischen Ziffern beziehen sich auf die 16 Reifs'schen Lösungen des § 2, S. 98—100, die arabischen auf die Nummern dieser Tabelle.

No.	Anfangsloch	Schlussloch	
4.	74	44	reziprok zu II
5.	74	14	s. V
6.	74	47	s. IV
7.	74	41	symm. zu 6
8.	52	55	reziprok zu XIV
9.	52	25	s. XVI
10.	24	54	reziprok zu IX
11.	24	57	reziprok zu X
12.	24	51	symm. zu 11
13.	55	52	s. XIV
14.	55	25	symm. zu 13
15.	54	24	s. IX
16.	54	57	s. VII
17.	54	51	symm. zu 16
18.	44	74	s. II
19.	44	14	symm. zu 18
20.	44	47	symm. zu 18
21.	44	41	symm. zu 18.

Wir sehen hiernach, daß für ein Brett von 33 Feldern die „Aufgabe des Spiels“ mit beliebigem Anfangsloch lösbar ist, wenn als Schlussloch ein beliebiges, dem Anfangsloch nur kongruentes Loch vorgeschrieben ist, und daß die von Reifs angegebenen Lösungen für jeden dieser Fälle eine Lösung zu liefern imstande sind.

§ 6. Tripelzüge.

Es sei hier noch gestattet, eine Bemerkung allgemeinerer Natur hinzuzufügen. Beschäftigt man sich mit dem Aufsuchen von Lösungen unseres Spiels, so wird man bemerken, daß eine Folge von Zügen häufig wiederkehrt; es sind dies die Züge $\frac{A}{A'}$, $\frac{D}{D'}$, $\frac{A'}{A}$ bei der in nebenstehender Figur 8 angegebenen gegenseitigen Lage der Felder, wenn A , B , C , D besetzt und A' leer ist.

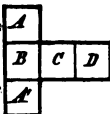


Fig. 8.

Ist A' besetzt und dafür A leer, so thut man die Züge $\frac{A'}{A}$, $\frac{D}{B}$, $\frac{A}{A'}$. Der Effekt ist in beiden Fällen derselbe, nämlich der, daß die Felder B, C, D leer werden, während sich auf A und A' nichts ändert. Wir wollen daher eine solche Zugfolge, auf die zuerst Herr Hermary aufmerksam machte¹⁾, mit einem besonderen Namen, „Tripel-Zug“ („coup triple“), belegen und in der Form (B, C, D) schreiben. So enthält z. B. die Aufgabe VI des § 2, S. 99 sechs solcher Tripelzüge, nämlich

- 1) $\frac{56}{54}$; $\frac{75}{55}$; $\frac{54}{56}$ 2) $\frac{43}{63}$; $\frac{51}{53}$; $\frac{63}{43}$ 3) $\frac{33}{53}$; $\frac{41}{43}$; $\frac{53}{33}$ 4) $\frac{23}{43}$; $\frac{31}{33}$; $\frac{43}{23}$ 5) $\frac{34}{32}$;
 $\frac{13}{33}$; $\frac{32}{34}$ 6) $\frac{56}{36}$; $\frac{44}{46}$; $\frac{36}{56}$.

Wir führen weiter als ein Beispiel für eine ausschließlich durch Tripelzüge lösbare Aufgabe die folgende an²⁾: Auf einem weiterhin noch zu besprechenden Brett von 37 Feldern sind 25 besetzt, dagegen die 12 in der Fig. 9 mit eingeklammerten Platznummern bezeichneten leer; alle Felder bis auf das Mittelfeld 44 sollen geleert werden.

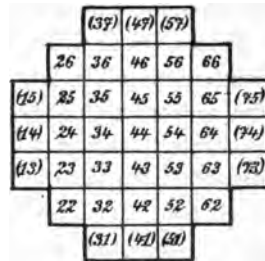


Fig. 9.

Die anzuwendenden Tripelzüge sind alsdann folgende: (24, 25, 26); (34, 35, 36); (46, 56, 66); (45, 55, 65); (64, 63, 62); (54, 53, 52); (42, 32, 22); (43, 33, 23).

§ 7. Das Solitärspiel mit 37 Löchern.

Wir wenden uns zur Betrachtung der in Frankreich üblichen Form unseres Spiels, nämlich dem schon oben angeführten Fall der 37 Felder, und suchen zunächst, wie in § 5 für die 33 Felder, auf grund der erweiterten Spielregel des § 4 gewisse Unmöglichkeiten festzustellen. Denken wir

1) s. Lucas, Récréat. t. I, p. 114.

2) s. Lucas, l. c. t. I, p. 116.

uns alle 37 Felder besetzt, so können wir bei Zugrundelegung der erweiterten Spielregel nach Satz II (§ 4) zunächst die 4 Reihen von je 3 aufeinanderfolgenden, in Fig. 9 eingeklammerten Feldern leeren, so daß nur noch das Quadrat der 25 Felder übrig bleibt. Dies läßt sich dann aber, wie wir oben (§ 6) gesehen haben, sogar auf grund der gewöhnlichen Spielregel bis auf das Mittelfeld leeren, und wir haben also als reduzierte Stellung des vollbesetzten Brettes das Mittelfeld. Nun ist aber die Anfangsstellung bei unserem Spiel nicht das vollbesetzte Brett, sondern das mit einem leeren Feld. Statt eines leeren Feldes können wir uns aber nach Satz I (§ 4) auch ebensogut 2 Pflöcke in dem betreffenden Loch denken und den zweiten überzähligen dann nach Satz III (§ 4) in das entsprechende ihm kongruente Loch des inneren Quadrats der 9 Felder bringen, so daß also die reduzierte Stellung der Anfangsstellung die ist, daß auf dem Mittelfeld ein Pflock steht und außerdem noch einer auf einem der 9 Felder des inneren Quadrats. Befindet sich der zweite Pflock auch auf dem Mittelfeld, so ist die reduzierte Stellung von der ersten Klasse (s. S. 106), also die Aufgabe nach Theorem II (§ 4) jedenfalls nicht lösbar, da die Schlufsstellung mit nur einem Pflock stets von der zweiten Klasse ist. Ebenso wenig ist dies der Fall, wenn der zweite Pflock in den Löchern 33, 35, 53, 55 sich befindet, da dann die reduzierte Stellung von der dritten oder vierten Klasse ist. Für alle anderen, diesen ausgeschlossenen Feldern nicht kongruenten Felder als Anfangsfelder bleibt die Lösbarkeit dagegen zunächst noch dahingestellt. Es verbleiben somit für das Anfangsloch noch folgende 16 Löcher: 13; 15; 24; 34; 37; 57; 46; 45; 75; 73; 64; 54; 51; 31; 42; 43, welche sich aus Gründen der Symmetrie auf die 3 Fälle 13; 42; 45 reduzieren. Für das erste dieser 3 als Anfangsfeld erhält man die Lösung: $\frac{33}{13}; \frac{31}{33}; \frac{43}{23}; \frac{13}{33}; (53, 52, 51); \frac{73}{53}; \frac{45}{43}; (35, 36, 37); \frac{15}{35}; (55, 56, 57); \frac{75}{55}; \frac{43}{23}; \frac{24}{44}; \frac{22}{24}; \frac{14}{34}; \frac{41}{43}; \frac{54}{56}; \frac{74}{54}; (46; 56; 66); \frac{34}{36}; \frac{26}{46}; \frac{43}{63}; \frac{62}{64}; \frac{47}{45}; (44, 54, 64)$. Der letzte Tripelzug lautet aus-

föhrlich: $\frac{45}{43}$; $\frac{64}{44}$; $\frac{43}{45}$, so dafs 45 das Schlufsloch ist. Wir bekommen leicht ein zweites Schlufsloch, indem wir den letzten Zug ersetzen durch $\frac{44}{42}$. Wir haben damit L6sungen gefunden mit 45 und 42 als Schlufslockern und erhalten durch Bildung der reziproken hieraus die L6sungen f6r jene als Anfangslocker. Damit ist aber dann gezeigt, dafs die erwähnten 16 L6cher als Anfangslocker m6glich sind, die anderen 21 aber nicht.

§ 8. Das Solitärspiel mit 41 L6chern.

Schliesslich wenden wir uns noch zu dem Fall eines Brettes mit 41 L6chern (s. Fig. 10). Bedenken wir, dafs f6r das vollbesetzte Brett von 37

L6chern als reduzierte Stellung sich ein einziger Pflock auf dem Mittelfeld ergab, so finden wir f6r unseren jetzigen Fall die reduzierte Stellung leicht, indem wir die Pflocke der 4 neu hinzugekommenen Felder auf die ihnen kongruenten Felder 34; 43; 45; 54 und dann die von 43 und 54 auf 45 resp. 34 setzen, worauf nach Anwendung von Satz I (§ 4) offenbar nur ein

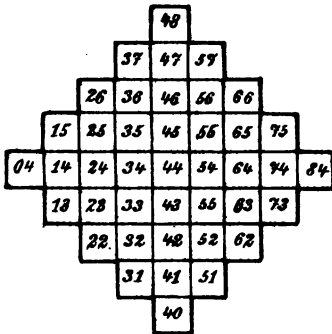


Fig. 10.

Pflock auf 44 übrig bleibt, so dafs sich also auch hier f6r das vollbesetzte Brett eine reduzierte Stellung zweiter Klasse ergibt wie in § 7. Die dort nachgewiesenen Unm6glichkeiten gelten also jedenfalls auch hier, und es verbleiben f6r das Anfangsloch also h6chstens die dort übrig gebliebenen 16 Felder und die jetzt neu hinzugetretenen Felder 04; 48; 84; 40, da die den letzteren kongruenten Felder in dem inneren Quadrat der 9 Felder gleichfalls in § 7 noch nicht ausgeschieden sind.

Wir denken uns nun, einem Raisonnement von Herrn

Mantel¹⁾ folgend, das Brett schachbrettartig in zwei Farben, weiß und schwarz, ausgeführt und zwar das Mittelfeld etwa schwarz; dann werden sämtliche 16 Randfelder ebenfalls schwarz. Die Zahl aller schwarzen Felder ist 25, die aller weißen 16. Man erkennt nun leicht folgendes:

1) Ein Pflock kann im Laufe des Spiels niemals von einem schwarzen Feld auf ein weißes kommen und umgekehrt; wir unterscheiden daher kurz „weiße“ und „schwarze“ Pflöcke.

2) Die Pflöcke der Randfelder können nur so vom Brett entfernt werden, daß sie zuvor die Randfelder verlassen; dies ist aber nur so möglich, daß jedesmal ein anderer und zwar ein weißer Pflock geschlagen wird.

Hiernach wird offenbar die Aufgabe der weißen Pflöcke darin bestehen, einerseits die 9 (resp. 8, falls ein schwarzes Anfangsloch in Abrechnung zu bringen ist) inneren schwarzen Pflöcke abzuschlagen und sich einzeln den schwarzen Pflöcken der Randfelder als Opfer anzubieten, damit diese die Randfelder verlassen und dann von einem der noch nicht geopferten weißen Pflöcke geschlagen werden können. Hieraus folgt aber, daß das Anfangsloch jedenfalls ein weißes nicht sein kann; denn dann könnten nur 15 der schwarzen Randpflöcke ihre Randfelder verlassen, es blieben also mindestens 2 Pflöcke übrig, nämlich der durch Abschlagen des letzten weißen Pflocks von seinem Randfeld heruntergekommene schwarze und der auf seinem Randfeld verbleibende 16. schwarze Pflock. Damit scheidet aber auch von denjenigen Feldern, welche auf einem Brett von 37 Feldern noch als Anfangslöcher auftreten konnten, hier die Felder 34; 43; 45; 54 für das Anfangsloch aus. Aber auch die neu hinzugetretenen Felder sind als Anfangslöcher unmöglich; denn nach dem ersten Zuge würden wir, falls ein solches Feld Anfangsloch wäre, wieder 16 schwarze Randpflöcke und nur noch 15 weiße Pflöcke haben.

Es bleiben somit nur noch allenfalls brauchbar als An-

1) Briefl. Mitteilung an Lucas; s. dessen „Récréat. mathém.“ t. I, p. 233, Note V.

fangsloch 12 Löcher, welche jedoch nur zwei wesentlich verschiedene Arten repräsentieren. Als Repräsentanten dieser zwei Arten dürfen wir ansehen 13 und 42. Diese können nun wirklich als Anfangslöcher auftreten, wie folgende von Herrn Mantel herrührende Lösung und die zu ihr reziproke zeigen:

$$\frac{15}{13}; \frac{34}{14}; \frac{04}{24}; \frac{54}{34}; (24, 25, 26); (35, 36, 37); (46, 47, 48); \frac{74}{54}; \frac{66}{64};$$

$$\frac{45}{65}; \frac{75}{55}; \frac{63}{65}; \frac{43}{63}; \frac{62}{64}; \frac{54}{74}; \frac{84}{64}; (55, 56, 57); \frac{65}{63}; \frac{73}{53}; \frac{23}{43}; \frac{43}{63}; \frac{51}{53}; \frac{31}{33};$$

$$\frac{63}{43}; \frac{43}{23}; \frac{13}{33}; \frac{41}{43}; \frac{34}{32}; \frac{22}{42}; \frac{43}{41}; \frac{40}{42} \text{. } ^1)$$

1) Andere Lösungen der Herren Hermary, Chicandard und Redon s. bei Lucas l. c. t. I, p. 117, 232, 234.

Kapitel IX.

Das Achtköniginnenproblem.

Ein guter Mathematiker ist ein guter Schachspieler.
JEAN PAUL. „Die unsichtbare Loge.“
Erster Sektor.

§ 1. Historische Einleitung.

In der „Illustrierten Zeitung“ vom 1. Juni 1850 findet sich unter der Rubrik „Schach“ „Eine in das Gebiet der Mathematik fallende Aufgabe von Herrn Dr. Nauck in Schleusingen“ folgenden Inhalts: „*Man kann 8 Schachfiguren, von denen jede den Rang einer Königin hat, auf dem Brett so aufstellen, daß keine von einer anderen geschlagen werden kann.*“¹⁾ In der Nummer vom 21. September desselben Jahrgangs giebt dann Nauck die 92 Lösungen der Aufgabe, nachdem er diese Zahl

1) Irrtümlicherweise wird diese Stelle stets als das erste Vorkommen unseres Problems citiert. Wie Herr E. Landau („Über das Achtdamenproblem und seine Verallgemeinerung“, Naturw. Wochenschr. Bd. XI, 2. Aug. 1896) dagegen bemerkt hat, ist die Aufgabe vielmehr bereits in der Berliner Schachzeitung Bd. III, 1848, p. 363 von einem ungenannten „Schachfreund“ gestellt worden. Catalan, der (Nouv. annales de mathém. 2^{ième} série, t. XIII, 1864, p. 187) — jedenfalls infolge Druckfehlers — statt dessen Berl. Schachz. 1840 anführt, wird dieselbe Stelle gemeint haben. — Wenn wir trotzdem oben in der historischen Einleitung an jene Nauck'sche Behandlung anknüpfen, so bestimmt uns hierbei der Umstand, daß die Fragestellung in der „Schachzeitung“ zunächst nur 2 spezielle Lösungen (s. Berl. Schachzeitung IV, 1849, p. 40) gezeitigt hat und anscheinend überhaupt kein sonderliches Interesse für unser Problem zu erregen vermocht hat, so daß jenes Blatt seine Leser noch 1854 mit einem Teil der Lösungen abspeisen durfte (s. Schachz. IX, 1854, p. 446), während dagegen in der „Illustr. Zeit.“ nicht nur alle 92 Lösungen zuerst richtig angegeben wurden, sondern auch von dort aus, wie oben dargestellt, die fruchtbarste Anregung ausging.

zuvor (ibid. 29. VI. 1850) irrtümlich auf 60 angegeben hatte. Auch der große Mathematiker C. F. Gauß hatte die Aufgabe in der „Illustrierten Zeitung“ gelesen; in seinem Briefwechsel mit Schumacher¹⁾ ist zu wiederholten Malen die Rede von dieser Aufgabe, welcher beide Gelehrten anscheinend großes Interesse entgegenbrachten. Gauß fand sehr bald 72 Lösungen, „ohne jedoch verbürgen zu können, daß weiter keine möglich sind“²⁾; die vollständige Angabe aller Lösungen rührt aber nicht von Gauß her, wie fast stets irrtümlich behauptet wird, sondern, wie gesagt, von dem Erfinder der Aufgabe, Nauck³⁾, wenn auch der „princeps mathematicorum“ selbstverständlich sofort erkannt hatte, wie man „durch ein methodisches Tatonnieren sich die Gewißheit (ob jene 92 Fälle alle sind) verschaffen kann, wenn man ein oder ein paar Stunden daran wenden will.“³⁾

§ 2. Die Aufgabe auf dem Brett von 16 Feldern.

Nach diesen historischen Vorbemerkungen wenden wir uns zur Sache selbst und werden am schnellsten mit der Materie vertraut werden, wenn wir einerseits die Aufgabe in ihrer allgemeinsten Form aussprechen, nämlich: „*n Königinnen auf einem quadratischen Brett von n^2 Feldern so aufzustellen, daß keine eine andere schlägt*“, andererseits die Verhältnisse zunächst an den einfachsten Spezialfällen studieren. Der Vollständigkeit halber sei dabei zunächst die Bemerkung gestattet, daß die Gangart der Königin oder „Dame“, wie man in Deutschland häufiger sagt, bekanntlich darin besteht, daß dieselbe sowohl beliebig in horizontaler, wie vertikaler Richtung (Gangart des Turms), als auch beliebig in schräger Richtung, d. h. parallel zu einer der beiden Diagonalen des quadratischen Bretts (Gangart der Läufer), zieht. Man er-

1) Briefwechsel zwischen C. F. Gauß und H. C. Schumacher, herausgeg. von Peters, Altona 1860—65. Bd. VI. p. 106, 110, 112—115, 117—121.

2) l. c. Brief vom 12. IX. 1850.

3) s. Gauß' Brief vom 27. IX. 1850, p. 118.

kennt nun sofort, daß für $n = 2$ und $n = 3$ überhaupt keine Lösungen möglich sind. Für $n = 4$ findet man leicht eine, z. B.

4			+	
3	+			
2				+
1		+		
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>

Fig. 1.

die in Fig. 1 angegebene, Lösung, wo die Königinnen durch Kreuze dargestellt sind. Um nun aber alle Lösungen dieses Falles zu haben, wollen wir in Gauß'scher Weise methodisch probieren. Zunächst sieht man sofort, daß in jeder Kolonne (Vertikalreihe) je eine Königin stehen muß, desgleichen in jeder Zeile (Horizontalreihe), und zwar gilt

dies offenbar allgemein für jede Form des Bretts. Wir dürfen hier also jedenfalls annehmen, daß eine Königin auf einem der Felder $a1$, $b1$, $c1$, $d1$ steht.¹⁾ Setzen wir sie zunächst auf $a1$ und bezeichnen alle von ihr beherrschten und damit

4	○			○
3	○		○	
2	○	○		
1	+	○	○	○
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>

Fig. 2.

für unsere Aufgabe ausscheidenden Felder durch kleine Kreise, so erhalten wir das Bild der Fig. 2. Für die in die zweite Zeile zu setzende Königin bleibt uns daher nur noch die Wahl zwischen den Feldern $c2$ und $d2$. Wählen wir $c2$, so erhalten die Felder $b3$ und $d3$ auch einen Kreis, und die dritte Zeile scheidet damit überhaupt aus,

so daß also diese Annahme ausgeschlossen ist. Wählen wir aber $d2$, so verbleibt von der dritten Zeile nur noch $b3$ als einziges Feld, und die dritte Königin würde von hier aus die

4		○		
3		○		○
2	○	○	○	
1	○	+	○	○
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>

Fig. 3.

beiden in Fig. 2 noch freien Felder der vierten Zeile auch beherrschen, so daß also auch dieser Fall unmöglich ist. Eine Lösung mit einer Königin auf $a1$ existiert also nicht.

Setzen wir die erste Königin nun auf $b1$, so haben wir zunächst das Bild der Fig. 3. In der zweiten Zeile bleibt dann nur das Feld $d2$ übrig und hiernach in der dritten nur noch $a3$ und in der vierten $c4$. Das ist dann eine richtige

1) Wegen der Notation der Felder s. Kap. VII, S. 85.

Lösung und zwar die oben (Fig. 1) von uns schon angegebene. Besitzt man nun eine richtige Lösung, so erhält man daraus offenbar eine weitere, indem man die Reihenfolge der Kolonnen umkehrt oder, was auf dasselbe hinauskommt, indem man das Brett in einem am rechten Rande gedachten Spiegel spiegelt. Aus jeder Lösung mit einer Königin auf dem Felde $d1$ würde so eine solche mit $a1$ als einem der besetzten Felder hervorgehen; letztere existiert aber nicht, folglich auch erstere nicht. Eine Lösung mit einer Königin auf $c1$ kann nur hervorgehen aus einer, bei der eine Königin auf $b1$ steht und umgekehrt; von letzterer Art giebt es nun gerade eine, also auch eine von ersterer Art, nämlich die in Fig. 4 gegebene.

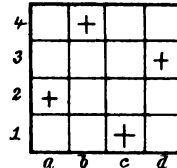


Fig. 4.

Für $n = 4$ besitzt unsere Aufgabe also nur 2 Lösungen.

§ 3. Das Brett von 25 Feldern. Zusammengehörige Lösungen. 36 Felder.

Wenn in einer Lösung für ein Brett von n^2 Feldern eine oder beide Diagonalen ganz frei sind, so erhält man sofort daraus mindestens eine Lösung für ein Brett von $(n + 1)^2$ Feldern, indem man an einem der Enden der freien Diagonale ein rechtwinklig gebogenes Stück ansetzt, so zwar, daß man ein Brett von $(n + 1)^2$ Feldern erhält, und nun die $(n + 1)$ -te Königin auf das neu hinzugekommene Eckfeld der Diagonale setzt. Umgekehrt muß man alle Lösungen für ein Brett von $(n + 1)^2$ Feldern, in denen ein Eckfeld besetzt ist, aus den Lösungen für ein Brett von n^2 Feldern erhalten können. So liefern uns z. B. die beiden Lösungen des vorigen § zusammen 8 Lösungen für den Fall $n = 5$, indem wir an jede der 4 Ecken in beiden Lösungen ein rechtwinkliges Stück mit einem an der Biegung besetzten Felde ansetzen. Von diesen 8 Lösungen giebt Fig. 5 eine.

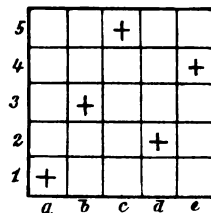


Fig. 5.

Da von den beiden im vorigen § hergeleiteten Lösungen sich die eine aus der anderen durch Vertauschung der Kolonnen herleiten liefs, liegt die Frage nahe, ob und wieviele neue Lösungen sich überhaupt aus einer bekannten herleiten lassen. Als Versuchsobjekt hierfür wollen wir die soeben gefundene Lösung der Fig. 5 benutzen. Denken wir uns, das Brett liege auf einer festen Unterlage aus Papier oder dergleichen, auf welchem die übliche Notation für die Zeilen und Kolonnen verzeichnet ist, wobei das Brett selbst beweglich sein soll. Dasselbe werde nun jetzt im Sinne der Drehung des Uhrzeigers um 90° gedreht; unsere Kreuze liefern uns auch wieder eine richtige Konfiguration, welche aber, da die Felder jetzt anders zu bezeichnen sind, als eine von der früheren Lösung verschiedene anzusehen ist; es ist die Lösung: $a5, b2, c4, d1, e3$ oder, wie wir fortan stets — unter stillschweigender Voraussetzung alphabetischer Kolonnenfolge — kurz schreiben wollen: 52413. Drehen wir nunmehr in derselben Richtung weiter um 90° , so erhalten wir wieder eine neue Lösung, nämlich: 24135 und schliesslich nach nochmaliger Drehung um 90° : 35241, worauf bei weiterer Drehung die ursprüngliche Lösung wieder erhalten wird. So ergeben sich also durch successive Drehungen aus einer Lösung im allgemeinen 3 weitere. Ferner erhalten wir aus jeder dieser 4 Lösungen je eine weitere, wenn wir die Reihenfolge der Kolonnen umkehren; hier in unserem Beispiel führt dies bezw. zu

42531
 31425
 53142
 14253.

Diese so erhaltenen 8 Lösungen — welche übrigens natürlich mit den im Eingang dieses § erwähnten und dort aus dem Fall $n = 4$ hergeleiteten identisch sein müssen, da sie alle ein besetztes Eckfeld aufweisen — gehören insofern zusammen, als sich aus jeder von ihnen die 7 anderen herleiten lassen; überhaupt lassen sich im allgemeinen aus einer Lösung immer 7 weitere herleiten und zwar 3 durch

Drehung und aus jeder dieser 4 eine weitere durch Spiegelung an einem der 4 Ränder des Bretts, also etwa dem Rande rechts. Arithmetisch lassen sich diese 7 Lösungen in der oben eingeführten Schreibweise, welche sich auf Angabe der Zeilen beschränkt, folgendermaßen herleiten: Die Lösung, welche sich durch Drehung um 90° im Sinne des Uhrzeigers aus einer bestimmten, sagen wir 13524, ergibt, erhält man, indem man in der ursprünglichen Lösung 13524 von den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 successive die Platznummern, von rechts ab gerechnet, nimmt: die 1 befindet sich dort — von rechts ab gerechnet — auf Platz 5, die 2 auf Platz 2 etc.; man erhält daher als neue Lösung 52413. Das durch Drehung um 180° sich ergebende Bild erhalten wir, indem wir die Zahlen der ursprünglichen Lösung alle von 6 (allgemein von $n + 1$) abziehen und dann die Reihenfolge umkehren; dies ergibt aus 13524 zunächst 53142 und in umgekehrter Reihenfolge also 24135. Das durch Drehung um 270° im Uhrzeigersinne resp. um 90° im umgekehrten Sinne entstehende Bild erhält man, indem man in der ursprünglichen Stellung 13524 successive die Platznummern von 5, 4, 3, 2, 1 und zwar von links ab gerechnet nimmt, was hier 35241 ergibt. Die durch Spiegelung an dem rechten Brettrand sich ergebenden Lösungen erhält man einfach durch Umkehrung der Reihenfolge in unserer schematischen Schreibweise, so daß aus 13524 z. B. 42531 entsteht.

Mehr als diese 7 Lösungen ergeben sich aber aus einer Lösung durch Drehungen und Spiegelungen nie. Alle diejenigen, welche man scheinbar noch weiter dadurch ableiten kann, sind bereits darunter enthalten. So bewirkt z. B. eine Spiegelung an dem oberen oder unteren Brettrande oder, was dasselbe ist, eine Umkehrung der Zeilenreihenfolge offenbar dasselbe wie eine Drehung um 180° , verbunden mit unserer obigen Spiegelung am rechten resp. linken Brettrande; so ist weiter die Lösung, die man durch Spiegelung an der Diagonale $a_1 - d_5$ erhalten kann, identisch mit der durch Drehung um 270° und nachherige Spiegelung (beides im obigen Sinne) erhaltenen und die durch Spiegelung an der anderen

Diagonale sich ergebende mit der durch Drehung um 90° und nachherige Spiegelung resultierenden. Es bedarf nicht des Beweises, daß diese Verhältnisse allgemeine Gültigkeit für ein beliebiges n besitzen.

Die 7 Operationen, welche die neuen Lösungen liefern, bilden natürlich zusammen mit der identischen Operation eine „Gruppe“ von der Ordnung 8.¹⁾ Bezeichnen wir die Operation der Drehung im Uhrzeigersinne mit R und die Spiegelung am rechten Brettrand mit S , so besteht unsere Gruppe aus den Elementen:

$$1, R, R^2, R^3 \\ S, RS, R^2S, R^3S,$$

wo $R^4 = S^2 = 1$, $R^2S = SR^2$, $RS = SR^3$, $R^3S = SR$ ist.

R^3S ist²⁾, wie wir schon wissen, gleichbedeutend mit einer Spiegelung an der Diagonale \diagdown (d. h. der von unten links nach oben rechts verlaufenden) und RS mit der an der anderen Diagonale, während R^2S äquivalent ist mit einer Spiegelung am oberen oder unteren Brettrand.³⁾

1) Dieselbe ist eine Gruppe vom „Doppelpyramidentypus“ nach einer von Herrn Klein herrührenden Bezeichnung (s. dessen Arbeit „Elliptische Funktionen und Gleichungen 5. Grades“ Math. Ann. XIV, 1879, p. 114) und ist als Untergruppe in der 24-gliedrigen Gruppe des Octaeders enthalten (vgl. Dyck, Gruppentheor. Studien II, Math. Ann. XXII, 1883, p. 103).

2) Wegen der schwankenden Schreibweise bemerken wir, daß die Operationen von links nach rechts ausgeführt gedacht sind.

3) Bezeichnet man die Kolonnen und Zeilen des gewöhnlichen Schachbretts durch $-7, -5, -3, -1, +1, +3, +5, +7$ und ein Feld der Zeile a und Kolonne b durch $a + bi$, — wobei man sich unter i die imaginäre Einheit oder nur ein Symbol zur Scheidung von Zeilen- und Kolonnennotation vorstellen mag — so stellen sich die 8 zusammengehörigen Stellungen in folgender eleganten Form dar:

$$\begin{array}{l|l} a + bi & a - bi \\ -b + ai & -b - ai \\ -a - bi & -a + bi \\ b - ai & b + ai \end{array} \quad (\text{Gauß, l. c. p. 121, Brief v. 27. IX. 1850}).$$

Diese Darstellung, deren Einfachheit auf der Wahl der positiven und negativen ungeraden Zahlen für die Feldernotation beruht, gilt natürlich allgemein für die 8 zusammengehörigen Positionen auf einem beliebigen Brett, wenn wir bei geradem $n = 2m$ die Zeilen und Kolonnen mit $-(2m-1), -(2m-3), \dots, -3, -1, +1, +3, \dots, +(2m-3), +(2m-1)$ und bei ungeradem $n = 2m + 1$ mit $-2m, -(2m-2), \dots, -4, -2, 0, +2, +4, \dots, +(2m-2), +2m$

Diese 8 zusammengehörigen Lösungen sind aber nicht immer verschieden, vielmehr können sie sich, wie schon Gauß¹⁾ bemerkt hat, auf 4 oder 2 verschiedene reduzieren. Die Spiegelung liefert allerdings, wie aus ihrem arithmetischen Aequivalent, der Umkehrung der Ziffernfolge, ohne weiteres ersichtlich ist, stets eine neue Lösung, jedoch braucht für die Drehungen dies nicht der Fall zu sein, vielmehr kann sich schon nach einer Drehung um 180° und selbst schon nach einer um 90° wieder die ursprüngliche Stellung ergeben. Für das letztere ist ja der oben (§ 2) behandelte Fall $n = 4$ ein Beispiel; wir hatten dort 2 Lösungen, die gegenseitig ihre Spiegelbilder — und zwar mit bezug auf einen beliebigen Bretttrand als Spiegel — sind, bei Drehungen aber stets in sich übergehen. In dem Fall, das zwar noch nicht nach einer Drehung um 90° , wohl aber nach einer solchen um 180° die erste Stellung wiederkehrt, giebt es natürlich 4 verschiedene zusammengehörige Lösungen; die Umkehrung der Zeilenfolge liefert alsdann dasselbe wie die der Kolonnenfolge, die Spiegelung an der einen Diagonale dasselbe wie die an der anderen. Ein Beispiel hierfür bietet der Fall $n = 6$; es giebt dort, wie man sich leicht überzeugt, im ganzen nur gerade 4 und zwar zusammengehörige Lösungen, von denen eine in Fig. 6 angegeben ist. Die 3 anderen zugehörigen sind die durch

6			+			
5						+
4		+				
3						+
2	+					
1				+		
	a	b	c	d	e	f

Fig. 6.

Drehung um 90° sich ergebende, nämlich 362514, und die Spiegelbilder der beiden ersteren, nämlich 531642 und 415263.

Lösungen, aus denen sich 7 neue ergeben, nennen wir fortan „unsymmetrisch“, solche mit 3 oder nur einer derivierten

bezeichnen. Einer Drehung um 90° im Uhrzeigersinne entspricht bei dieser Darstellung — unter i die imaginäre Einheit¹⁾ verstanden — einfach eine Multiplikation mit i und einer Spiegelung am rechten Bretttrand ein Vorzeichenwechsel des imaginären Teils.

1) l. c. Brief vom 12. IX. 1850.

Lösung „symmetrisch“ und zwar genauer „einfach-symmetrisch“ bzw. „doppelt-symmetrisch“.

Gruppentheoretisch drückt sich dies natürlich so aus, daß bei einfacher Symmetrie $R^2 = 1$, bei doppelter $R = 1$ ist und die obige achtgliedrige Gruppe sich dadurch reduziert auf die viergliedrige

$$\begin{array}{c} 1, R \\ S RS \end{array}$$

bzw. die zweigliedrige $\frac{1}{S}$.

§ 4. Die bisher untersuchten Fälle. Das Auftreten der verschiedenen Felder und Farben in den Lösungen.

In diesem § geben wir zunächst eine Zusammenstellung der Lösungen für die bis jetzt überhaupt untersuchten Fälle, wobei wir uns darauf beschränken, von den im Sinne des § 3 zusammengehörigen Lösungen immer nur eine, die „Stamm-lösung“, anzugeben, so zwar, daß die einfach-symmetrischen durch * und die doppelt-symmetrischen durch ** von den nicht weiter gezeichneten unsymmetrischen unterschieden werden.

$$n = 4: 2 \text{ Lösungen} \\ 3142^{**}.$$

$$n = 5: 10 \text{ Lösungen} \\ 1) 13524 \\ 2) 41352^{**}.$$

$$n = 6: 4 \text{ Lösungen} \\ 246135^*.$$

$$n = 7: 40 \text{ Lösungen} \\ 1) 1357246 \\ 2) 1473625 \\ 3) 2637415 \\ 4) 2417536 \\ 5) 2514736^* \\ 6) 2574136^*$$

$n = 8$: 92 Lösungen¹⁾

- 1) 72631485
- 2) 61528374
- 3) 58417263
- 4) 35841726
- 5) 46152837
- 6) 57263148
- 7) 16837425
- 8) 57263184
- 9) 48157263
- 10) 51468273
- 11) 42751863
- 12) 35281746*.

Um für diesen Fall des gewöhnlichen Schachbretts wenigstens eine Lösung näher anzugeben, fügen wir in Fig. 7 die symmetrische bei, welche sich in dieser, der unten (S. 124) citierten Arbeit des Herrn Parmentier entnommenen Form besonders leicht dem Gedächtnis einprägt.

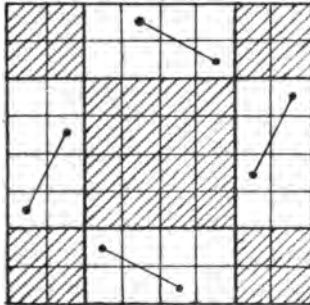


Fig. 7.

1) Aufser von Nauck, der auch bereits die Zusammengehörigkeit der Lösungen im Sinne von § 3 richtig angegeben hatte, war dieser Fall des gewöhnlichen Schachbretts behandelt von Bellavitis, *Atti dell' Istituto Veneto*, t. VI, p. 134. Venedig 1861 und von den französischen Offizieren Parmentier und De la Noë (s. Lucas „Le problème des huit reines“, *La revue scientifique* 1880, p. 948—953), welche ohne Kenntnis der früheren Arbeiten die 92 Lösungen aufgefunden haben (bezüglich der Methode s. S. 133), sowie auch von Pein, *Progr. Realsch. Bochum*, 1889, p. 35.

$n = 9$: 352 Lösungen¹⁾

136824975	248396157	279631485
137285946	249731685	281479635
138692574	249753168*	285396417
146392857	257936418	286931475
146825397	257948136	358296174
147382596	258136974	358297146
147925863	258196374	359247186
148397526	258693147	362951847*
157938246	258693174	368159247*
157942863	259418637	368519724
159642837	261379485	369741825
168374295	261753948*	372859164
174835926	261958473	386192574
174839625	263184975	427918536.
241796358	269358417	
247139685	275194683	

Für $n = 10$ gibt es nach Delannoy²⁾ 724 Lösungen, wobei statt der Zahl 10 überall 0 gesetzt werden mag:

1368059247	1470852936	1647082539	1849730625
1369704258	1495803627	1649730258	1869304752
1369704285	1497203685	1640793528	2468013579
1397042586	1497036258	1683792504	2483960175*
1469308257	1407935286	1680493572	2480596137
1470295386	1570429368	1693842057	2497501683
1470392586	1580372469	1693074258	2407963185
1470692538	1580742963	1695084273	2571069384
1470825369	1506924738	1603794258	2581703649
1470835926	1647039258	1796308524	2584703169

1) Dieselben wurden zuerst von Schoute in der holl. Zeitschr. „Eigen Haard“ in einer „Wiskundige Verpoozingen“ betitelten Artikelserie gegeben und von dem General Parmentier („Le problème des n reines“ Congrès de l'assoc. franç. pour l'avancement des sciences, Rouen 1883) berichtet. Unabhängig davon wurden sie auch von Pein (l. c.) angegeben.

2) s. Lucas, Récréat. t. I, p. 226; s. a. Pein, l. c. Tabelle 11, p. 57

2586307149	2706195384	2970415863	3691057248
2580369147	2839750164	3528074196	3728610594
2591047386	2859160374	3570461928	3827105964
2594086317	2803964175	3591607248	3862051497
2637019584	2804159637	3592074186	3869105724
2637085149	2918530746	3594108627	3801625794
2630859417	2938046157	3620195847	3960271485
2683195047	2930741586	3640195827	4259108637
2683740195	2950146837	3681470295	4280136975
2691853074	2961307485	3680195247	4695013827
2697013584	2963041857	3680415297	4835019627
2603794158	2968013574	3691470258*	4852017936
2793804615	2973085146	3691470825	4859102637*.

Für $n = 11$ haben die Herren Botton und H. Tarry¹⁾ unabhängig von einander übereinstimmend 341 wesentlich verschiedene Lösungen und zwar 12 einfach-symmetrische und 329 unsymmetrische, im ganzen also 2680 Lösungen gefunden.

Weiter sind die Untersuchungen bisher nicht geführt worden; wir werden sodann in § 6 noch für einige weitere Fälle auf grund einer besonderen Methode die doppelt-symmetrischen Lösungen kennen lernen. — Jedenfalls besitzt das Problem aber für $n > 3$ stets Lösungen. Eine solche läßt sich nach Pauls²⁾ folgendermaßen stets angeben, wenn wir wieder, wie zuvor, nur die Zeilen der einzelnen Königinnen nach der Reihenfolge der Kolonnen in der Form $a_1, a_2 \dots a_n$ anmerken:

Ist n gerade $= 2m$, so unterscheiden wir:

1) n , geteilt durch 6, giebt als Rest 0 oder 4; eine Lösung ist alsdann stets

$$2, 4, 6 \dots 2m \mid 1, 3, 5 \dots 2m - 1$$

1) s. Lucas, Récréat. t. I, Note IV, p. 231 und H. Tarry, Congrès de l'ass. franç. pour l'avanc. des sc. XIX. Limoges 1890. t. I, p. 153; die Lösungen selbst sind jedoch wohl nirgends publiziert bisher.

2) „Das Maximalproblem der Damen auf dem Schachbrette“ Deutsche Schachz. Bd. 29, 1874, p. 129—134; 257—267; vgl. a. Intermédiaire des mathématiciens; t. I, 1894, p. 140—141 (Frael).

oder

$$a_i = 2i$$

$$a_{n+1-i} = 2m + 1 - 2i \quad (i = 1, 2 \dots m)$$

2) n , geteilt durch 6, giebt den Rest 2; die Lösung ist dann

$$4, 2m - 2, 2m - 4 \dots 8, 6, 2m, 2 \mid 2m - 1, 1, 2m - 5, \\ 2m - 7 \dots 3, 2m - 3$$

oder

$$a_i = 2m - 2(i - 1) \quad (i = 2 \dots m - 2);$$

$$a_{n+1-i} = 2i - 1$$

$$a_1 = 4; a_{m-1} = n; a_m = 2;$$

$$a_n = n - 3; a_{m+2} = 1; a_{m+1} = n - 1.$$

Man erkennt leicht, daß außer für $n = 2$ niemals $a_i = a_k$ oder $a_i - a_k = \pm (l - k)$ ist, womit den Bedingungen des Problems genügt wird¹⁾; man überzeugt sich ferner leicht, daß bei diesen Lösungen kein Feld der beiden Diagonalen besetzt ist. Dies befähigt uns aber nach § 3 (Anfang), sofort für jedes ungerade $n = 2m + 1$ eine Lösung anzugeben; brauchen wir doch vor die für $n = 2m$ gegebene Lösung nur $2m + 1$ zu setzen.

Bezüglich der Häufigkeit des Vorkommens der einzelnen Felder in den Lösungen mag hier gleich bemerkt werden, daß in den Fällen $n = 4$ und $n = 6$ jedes Feld in allen Lösungen zusammengenommen gerade einmal vorkommt mit Ausnahme der gar nicht dabei vorkommenden Felder der beiden Diagonalen. In den Fällen $n = 7, 8, 9, 10$ kommen die verschiedenen Felder des Bretts auch ungleich häufig in den Lösungen vor, jedes aber bezw. mindestens 4-, 4-, 20-, 44-mal.¹⁾ Besonders merkwürdig ist der Fall $n = 5$, wo jedes Feld gleich oft in den Lösungen auftritt, nämlich je zweimal. Die 10 hier erhaltenen Lösungen lassen sich in 2 Klassen so schreiben, daß jede Klasse alle Felder des Bretts je einmal aufweist und daß die Lösungsschemata jeder Klasse durch cyklische Vertauschung der Elemente aus einander hervorgehen, wie nachstehende Zusammenstellung zeigt:

1) Wir müssen hier die Ausführungen von S. 131 antizipieren und verweisen event. auf diese.

2) Pein, l. c. p. 39–42.

I	II
52413	31425
24135	53142
41352	25314
13524	42531
35241	14253.

Dafs in jeder Lösung cyklische Vertauschungen gestattet sind, involviert offenbar, dafs man in jeder Lösung die letzte Kolonne vor die anderen und ebenso die erste hinter die anderen setzen darf und doch wieder eine Lösung erhält. Entsprechendes gilt natürlich auch von den Zeilen, da zwischen ihnen und den Kolonnen ein wesentlicher Unterschied nicht besteht.

Liest man in den obigen Klassen die Zahlen nach Vertikalreihen von oben nach unten, so erhält man natürlich wieder die Lösungen der Klasse. Hieraus ergibt sich eine merkwürdige Eigentümlichkeit dieses Falles: Denken wir uns einen Würfel aus $5^3 = 125$ kleinen Würfeln zusammengesetzt; denselben können wir uns in 5 horizontale Schichten von je 25 kleinen Würfeln zerlegt denken und entsprechend den 3 Richtungen des Raumes auch in 2 Systeme von je 5 solchen vertikalen Schichten. Eine jede derartige Schicht wollen wir als ein Schachbrett ansehen und uns die betreffenden Figuren etwa in den kleinen Würfeln stehend denken.¹⁾ Besetzen wir die

1) Das räumliche Schach hat übrigens auch praktische Schachspieler beschäftigt; der bekannte Schachmeister Kieseritzky verfertigte ein solches und zeigte es dem berühmten Anderssen gelegentlich des Londoner Turniers 1851; s. Jean Dufresne, „Das Schachspiel und seine Verehrer“. Deutsche Schachzeitung Bd. XXXIII, 1878, p. 141. — Es sei hier die beiläufige Bemerkung gestattet, dafs eine Ausdehnung unseres Problems auf den Raum unter Annahme einer den 3 Dimensionen entsprechend erweiterten Gangart der Königin kein Interesse zu bieten scheint, d. h. also die Aufgabe: in einem Würfel von n^3 Fächern n Königinnen so zu plazieren, dafs keine eine andere schlägt. Unter Gangart der räumlichen Königin wird man dabei analog offenbar zu verstehen haben, dafs sich die Königin nicht nur in den 3 verschiedenen Richtungen der Würfelkanten beliebig bewegen darf (Turmgangart), sondern dafs ein Königinnenzug

unterste horizontale Schicht nun so mit 5 Königinnen, wie es die erste Lösung einer der obigen Klassen I resp. II angiebt, die zweite Schicht entsprechend der zweiten Lösung derselben Klasse etc., so genügen nicht nur die 5 horizontalen Schichten den Bedingungen unseres Problems, sondern auch eins der beiden Systeme vertikaler Schichten. Das andere vertikale System genügt jedoch unseren Bedingungen nicht, vielmehr befinden sich die 5 Königinnen jeder Schicht dort in solchen Stellungen, daß sie sich als Türme zwar nie, dagegen als Läufer in jeder der Schichten angreifen, in der mittleren sogar alle 5 in der Diagonale stehen.

Der innere Grund für diese merkwürdige räumliche Anordnungsmöglichkeit liegt, wie wir im nächsten § sehen werden, darin, daß 5 weder durch 2 noch durch 3 teilbar ist (vgl. a. Kap. XIII, § 2), und wir können hiernach vermuten, daß für $n = 7$ etwas Ähnliches gilt. In der That lassen sich von den 40 Lösungen dieses Falls 28 in Klassen von je 7 so anordnen, daß die Lösungen derselben Klasse durch cyklische Vertauschungen aus einander hervorgehen. Jede dieser Klassen besteht aus einer Lösung, welche zu der Stammlösung 5) unserer Tabelle auf S. 132 gehört, und aus 6 weiteren Lösungen, von denen je 2 zu den Stammlösungen 1), 2), 3) der betreffenden Tabelle gehören,

sich auch zusammensetzen darf aus 2 resp. 3 geradlinigen Stücken von Würfelkantenrichtungen, jedoch so, daß die geradlinigen Stücke derselben gebrochenen Zugbahn zwar absolut beliebig, unter sich aber gleich lang sind (Gangart der räumlichen Läufer). Für den einfachen Fall von 3^o Fächern kann man nämlich schon mehr leisten, als das Problem verlangt, indem nicht nur 3, sondern sogar 4 den Bedingungen genügende Königinnen möglich sind. Denkt man sich nämlich den Würfel der 27 Fächer in 3 horizontale Schichten zu je 9 Fächern zerlegt und diese Schichten bezw. mit α , β , γ bezeichnet, während die 9 Felder derselben Schicht, wie auf dem gewöhnlichen Schachbrett, durch a , b , c einer- und 1, 2, 3 andererseits unterschieden sein mögen, so sind 4 Königinnen auf bezw. $\alpha a 1$, $\alpha b 3$, $\beta c 1$, $\gamma a 2$ mit den Bedingungen unseres Problems verträglich. Zu dieser Stellung giebt es 15 weitere entsprechende, womit allerdings die Möglichkeiten erschöpft sind, ebenso wie auch eine fünfte Königin nicht mehr zu plazieren ist.

während die Lösungen, welche zu 4) und 6) gehören, hierbei nicht auftreten.

Was ferner das Vorkommen der weißen und schwarzen Felder in den Lösungen unserer Aufgabe anlangt, so ist, wie R. Hoppe zuerst bemerkt hat¹⁾, bei geradem n jede Farbe durch eine gerade Anzahl von Feldern in jeder Lösung vertreten, bei ungeradem n aber die Farbe der Diagonalfelder in ungerader, die andere in gerader Anzahl. Stellt man sich nämlich die Aufgabe, n Türme auf einem Schachbrett von n^2 Feldern so aufzustellen, daß keiner den anderen angreift, so muß natürlich in jeder Zeile und Kolonne je ein Turm stehen. Die einfachste Lösung wäre die Diagonalstellung, in unserer Schreibweise $1, 2 \dots n$. Aus dieser würden alle anderen hervorgehen, indem man successive alle möglichen Vertauschungen von je zwei der n Elemente vornimmt. Durch eine solche Vertauschung ändern sich entweder die Anzahlen der weißen und schwarzen Felder gar nicht oder wenigstens um je 2 Felder. Denn die 4 dabei in Betracht kommenden Felder, die beiden der alten und die beiden der neuen Lösung, bilden die Ecken eines Rechtecks auf dem Schachbrett. Solche Eckfelder eines Rechtecks sind aber stets entweder alle in derselben Farbe gehalten oder 2 derselben (gegenüberliegend oder anliegend) weiß und die anderen beiden schwarz. Es kann sich daher die Anzahl der Felder einer Farbe immer nur um eine gerade Anzahl ändern. Die Farbe der Diagonale \diagdown ist nun in der Ausgangslösung n -mal vertreten, womit sich das gewünschte Resultat für die Lösungen des Turmproblems ergibt. Die Lösungen des Königinnenproblems müssen sich aber alle unter denen des Turmproblems befinden, müssen also gleichfalls die angegebene Eigenschaft besitzen.

§ 5. Methoden zur Auffindung der Lösungen.

Eine allgemeine Methode, welche es ermöglicht, sofort für jeden bestimmten Fall unseres n alle Lösungen hinzuschreiben,

1) „Bemerkung zum Königinnen-Problem“. Archiv der Mathem. u. Phys. 2. Reihe VIII, 1890, p. 333—334.

ist bisher nicht gefunden und scheint auch kaum denkbar. Hat doch selbst der große Gauß sich auf „methodisches Tatonnieren“ beschränken müssen, wie wir oben sahen. Das zu diesem Zweck von ihm angegebene und oben besprochene Verfahren ist nicht nur das zunächstliegende, sondern auch wohl das einfachste und bisher noch durch kein zweckmäßigeres ersetzt worden. Es ist so einfach, daß nach ihm der Franzose Laquière, wie beiläufig bemerkt sein mag, die 92 Lösungen für das gewöhnliche Schachbrett durch ein Kind in einem Nachmittag bestimmen lassen konnte, wobei nur 3 Fehler vorkamen.¹⁾

Eine Hauptschwierigkeit bei unserem Problem liegt darin, daß die Gangart der Königin eine Komposition aus 2 heterogenen Elementen, der Gangart des Turms und der der Läufer, ist. Es lag daher nahe, zunächst die Aufgabe zu stellen, 8 Türme auf dem Schachbrett zu plazieren, so daß keiner den anderen schlagen kann, und dann diejenigen unter den Lösungen auszusuchen, in denen die Türme durch Läufer ersetzt werden können, ohne daß sich alsdann 2 Läufer gegenseitig schlagen, resp. zuerst die betreffenden Läuferstellungen und darauf unter ihnen die Turmstellungen aufzusuchen. Thatsächlich teilen sich die wichtigsten Methoden nach diesen beiden Gesichtspunkten. Die Bezeichnungsweise der Felder kann leicht so gewählt werden, daß aus ihr ohne weiteres erkennbar ist, ob die eine der beiden Bedingungen erfüllt ist, und man erhält alsdann ohne weiteres überhaupt nur solche Kombinationen, welche dem Problem der Türme resp. dem der Läufer genügen; aus diesen Kombinationen sind dann diejenigen auszumerzen, welche nicht auch zugleich der anderen Bedingung genügen. Wählen wir die von uns schon oben zur Darstellung der Lösungen angewandte Bezeichnungsweise durch die 8 Zahlen 1, 2 . . . 8, so ist damit von vornherein bezüglich der Türme unsere Forderung erfüllt, und es sind jetzt nur noch alle möglichen Kombinationen dieser 8 Zahlen zu bilden und unter ihnen diejenigen herauszusuchen, welche zugleich eine Lösung

1) Lucas, Récréat. t. I, p. 80.

des Läuferproblems darstellen. Die Bedingung hierfür können wir nun offenbar so formulieren, daß, wenn man zu den Ziffern einer Kombination der Reihe nach von links nach rechts bzw. 1, 2, 3 . . . 8 addiert, die so erhaltenen 8 Summen unter einander alle verschieden sind und daß dasselbe auch stattfindet, wenn man zu den Ziffern bzw. 8, 7 . . . 2, 1 addiert, wo diese zwifache Form des Kriteriums durch die Gangart des Läufers in 2 verschiedenen Richtungen bedingt ist.¹⁾ Dieselbe Bedingung läßt sich auch dahin aussprechen, daß der absolute Unterschied zweier Ziffern in einer Kombination niemals gleich dem Unterschied ihrer Platznummern sein darf²⁾; so ist z. B. die Stellung 35741862 unbrauchbar, weil der Unterschied zwischen 3 und 8 derselbe ist, wie zwischen ihren Platznummern, nämlich 1 und 6, oder aber der Unterschied zwischen 7 und 2 derselbe wie zwischen ihren Platznummern 3 und 8, was sich nach dem obigen Gauß'schen Kriterium dadurch ausdrücken würde, daß nach Addition von bzw. 1, 2 . . . 8 sich an dritter und letzter Stelle dieselbe Summe 10 und bei Addition von 8, 7 . . . 1 sich an erster und sechster Stelle dieselbe Summe 11 ergeben würde.

Will man dagegen die Bedingung bezüglich der Läufer schon in die Schreibweise hineinlegen, so wählt man nach Herrn Günther³⁾ die durch das Schema der Fig. 8 für das Beispiel eines Bretts von 25 Feldern angegebene Notation. 2 Felder, zwischen welchen ein Läuferzug möglich ist, haben hiernach stets entweder gleiche Buchstaben oder gleiche Zahlenindices, und es handelt sich also nur darum, aus allen Kombinationen, in denen weder ein Buchstabe noch ein Zahlenindex mehr als einmal vorkommt, diejenigen auszuwählen, welche zugleich eine Lösung des Turmproblems

a_1	c_2	e_3	g_4	k_5
b_2	a_3	c_4	e_5	g_6
d_3	b_4	a_5	c_6	e_7
f_4	d_5	b_6	a_7	c_8
h_5	f_6	d_7	b_8	a_9

Fig. 8.

1) s. Gauß, l. c. Brief vom 27. IX. 1850.

2) In dieser Form wurde die Aufgabe z. B. in den *Nouv. ann. de mathém.* XI, 1852, p. 114 (Question 251) und ebda. 2^{ième} série VIII, 1869, p. 560 (Question 963) von Lionnet gestellt.

3) „Zur mathem. Theorie des Schachbretts“, *Archiv für Math. und Phys.*, 1874, p. 281—292; vgl. a. v. dems. „Lehrbuch der Determinanten-Theorie“. Erlangen 1875, p. 46.

darstellen. Es sind dies ja nun gerade diejenigen Kombinationen, von denen kein Paar von Elementen derselben Horizontal- oder Vertikalreihe angehört. Diese Kombinationen eines solchen Systems sind aber auch gerade diejenigen, welche die Glieder einer Determinante ausmachen, und man wird daher, um das „Tattonnieren planmäÙig“ zu gestalten, das obige System als Determinante auffassen, alle Glieder derselben entwickeln und dann diejenigen unter ihnen streichen, in denen ein Buchstabe oder ein Zahlenindex mehr als einmal vorkommt. Immerhin ist die Beziehung zu den Determinanten natürlich nur eine rein äußerliche, da eine wesentliche Eigenschaft derselben, das verschiedene Vorzeichen der Glieder je nach der Anzahl ihrer Inversionen, hier belanglos ist, und etwas Wesentliches ist mit dieser Bezugnahme daher nicht gewonnen. Wir wollen jetzt diese Günther'sche Methode an dem obigen Beispiel auseinandersetzen unter Benutzung der von Herrn Glaisher¹⁾ hierzu gemachten Zusätze.

Diejenigen Lösungen, in denen ein Eckfeld besetzt ist, müssen sich aus den Lösungen für ein 16-feldriges Brett ergeben, wie bereits S. 117 dargelegt wurde. Wir dürfen daher diese als erledigt ansehen und in der Determinante die 4 Eckfelder streichen. Wir wissen bereits (s. S. 117), was beiläufig erwähnt sei, daß es in diesem Falle 8 zusammengehörige Lösungen mit besetzten Eckfeldern giebt. Die Lösungen, in denen g_4 besetzt ist, müssen durch Spiegelung aus denen mit besetztem c_2 zu erhalten sein, und wir scheidem daher auch g_4 aus, so daß unsere Determinante — von den Vorzeichen der Glieder natürlich abgesehen — folgende Entwicklung liefert:

$$c_2 \begin{vmatrix} b_2 & c_4 & e_5 & g_6 \\ d_3 & a_5 & c_8 & e_7 \\ f_4 & b_6 & a_7 & c_8 \\ & d_7 & b_8 & . \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} b_2 & a_3 & e_5 & g_6 \\ d_3 & b_4 & c_6 & e_7 \\ f_4 & d_5 & a_7 & c_8 \\ & f_6 & b_8 & . \end{vmatrix}$$

Sind nun aber alle Lösungen mit c_2 bekannt, so kann man daraus auch alle mit g_6 , b_8 , f_4 durch Drehung und mit c_8 , f_6 , b_2 durch Spiegelung erhalten, so daß wir in der zweiten Determinante diese Elemente fortlassen dürfen. Ebenso dürfen in der mit c_2 multiplizierten Unterdeterminante alle Glieder, in denen c oder 2 vorkommt, gestrichen werden, in der zweiten entsprechend alle, in denen e oder 3 vorkommt, so daß in der zweiten Unterdeterminante alle Elemente der ersten Zeile gestrichen werden, mithin diese Determinante ganz wegfällt und wir also nur noch behalten:

1) „On the problem of the Eight Queens“, Philosophical Magazine Bd. 48, 1874, p. 457—467.

$$c_2 \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & e_5 & g_6 \\ d_3 & a_5 & \cdot & e_7 \\ f_4 & b_6 & a_7 & \cdot \\ \cdot & d_7 & b_8 & \cdot \end{vmatrix} = c_2 e_5 \begin{vmatrix} d_3 & a_5 & e_7 \\ f_4 & b_6 & \cdot \\ \cdot & d_7 & \cdot \end{vmatrix} + c_2 g_6 \begin{vmatrix} d_3 & a_5 & \cdot \\ f_4 & b_6 & a_7 \\ \cdot & d_7 & b_8 \end{vmatrix} \dots$$

In diesen beiden Determinanten sind wegen der vorgesetzten Elemente e_5 und g_6 wieder alle Glieder mit e oder 5 resp. g oder 6 zu streichen, und es bleibt daher

$$c_2 e_5 \begin{vmatrix} d_3 & \cdot & \cdot \\ f_4 & b_6 & \cdot \\ \cdot & d_7 & \cdot \end{vmatrix} + c_2 g_6 \begin{vmatrix} d_3 & a_5 & \cdot \\ f_4 & \cdot & a_7 \\ \cdot & d_7 & b_8 \end{vmatrix}$$

Die erste dieser beider Determinanten fällt also überhaupt fort, und die zweite liefert als einziges brauchbares Glied: $c_2 g_6 a_5 f_4 b_8$. Es ist dies die uns schon bekannte (s. S. 122) doppelt-symmetrische Lösung, wozu dann noch die schon erwähnten 8 Lösungen mit den Eckfeldern kommen.

Eine von den vorhergehenden wesentlich verschiedene Methode ist die von Lucas publizierte¹⁾ des Herrn De la Noë. Dieselbe besteht darin, daß man sich das Schachbrett in mehrere Teile zerlegt denkt (s. Fig. 21, S. 155): der erste Teil ist das Quadrat der 4 Mittelfelder (bei geradem n) resp. das Mittelfeld (bei ungeradem n), der zweite der Rand, den man um den ersten Teil herumlegen muß, um wieder ein Quadrat zu erhalten, und so nimmt man entsprechend die weiteren Ränder. Man versucht dann, auf jedem der Teile, von innen anfangend, möglichst viele Königinnen zu plazieren. Besetzt man in dem Fall des gewöhnlichen Schachbretts eins der unter sich gleichberechtigten Mittelfelder, so sieht man sofort, daß das nächste Gebiet nur 4 für die zweite Königin noch offene Felder besitzt, erkennt aber bald, daß nicht beide inneren Teile mit je einer Königin besetzt werden dürfen, wenn man noch die anderen 6 Königinnen plazieren will.

Eine andere, von Lucas²⁾ selbst angegebene Methode liefert in gewissen Fällen eine Anzahl von Lösungen: Man bildet mit der Zahl a

1) Revue scientifique 1880 und Récrcat. t. I, p. 71.

2) Récrcat. t. I, p. 84. Über die Anzahl der so sich ergebenden Lösungen s. Récrcat. t. I, p. 232, sowie Frolov, Les carrés magiques, Note III, p. 41 (Neudruck ohne Jahresangabe).

beginnend eine arithmetische Reihe von n Zahlen mit der Differenz d , also $a, a + d, a + 2d \dots a + (n - 1)d$, wobei von den Zahlen, welche $> n$ sind, ihre kleinsten Reste mod n zu nehmen sind. Ist d relativ prim zu n , so erhält man so ein vollständiges Restsystem mod n . Der Unterschied zweier Zahlen von den Platznummern p und q ist nun $\equiv (p - q)d \pmod{n}$. Dies darf nun bekanntlich (s. S. 131) weder dem positiven noch dem negativen Wert von $(p - q) \pmod{n}$ kongruent sein. Die Kongruenzen

$$\begin{aligned} (p - q)d &\equiv \pm (p - q) \pmod{n} \text{ oder} \\ (p - q)(d \pm 1) &\equiv 0 \pmod{n} \end{aligned}$$

bedingen aber, wenn n relativ prim zu $d + 1$ und $d - 1$ ist, daß $p = q$ ist, so daß also umgekehrt unsere Bedingung sicher erfüllt ist, sobald $d + 1, d$ und $d - 1$ relativ prim zu n sind. Allerdings ist ein solches d unmöglich, wenn n durch 2 oder 3 teilbar ist (vgl. a. Kap. XIII, § 2). In allen anderen Fällen ist diese Methode aber anwendbar, z. B. mit $d = 2$; insbesondere lassen sich, wenn n eine Primzahl > 3 ist, stets $n - 3$ verschiedene Werte für d wählen. Zu jedem gehören dann n Lösungen, da als Anfangsglied a der arithmetischen Reihe eine beliebige der n Zahlen $1, 2 \dots n$ gewählt werden kann, so daß man also, wenn n eine Primzahl ist, $n(n - 3)$ Lösungen durch diese Methode erhält. Die n Lösungen mit demselben d gehen durch zyklische Vertauschungen auseinander hervor, und wir erkennen jetzt den inneren Grund für die im vorigen § gegebenen Anordnungen der Lösungen in den Fällen $n = 5$ und $n = 7$. Im ersteren Falle kann $d = 2$ oder 3 gewählt werden, jede der beiden Annahmen liefert 5 durch zyklische Vertauschungen unterschiedene Lösungen, im ganzen also 10 Lösungen, womit für diesen Fall überhaupt alle Lösungen erschöpft sind, während für $n = 7$ zu den für $d = 2, 3, 4, 5$ sich ergebenden $4 \cdot 7 = 28$ Lösungen noch weitere 12 hinzutreten.

§ 6. Die doppelt-symmetrischen Lösungen.

Während die Spiegelung stets zu einer Lösung eine neue liefern muß, so daß die Anzahl der Lösungen jedenfalls stets eine gerade Zahl ist, braucht dies, wie schon S. 121 bemerkt, bei Drehungen nicht der Fall zu sein. Die durch Drehung um 180° sich ergebende Lösung erhalten wir in der von uns gewöhnlich angewandten Schreibweise, indem wir die Ziffern der ursprünglichen Lösung alle von $n + 1$ abziehen und dann die Reihenfolge umkehren (s. S. 119). Hieraus folgt sofort:

Satz: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Stellung (Lösung) durch Drehung um 180° wieder in

sich übergeht oder, wie wir sagen, symmetrisch ist, ist die, daß immer je 2 in dem Stellungsschema gleich weit von beiden Enden entfernte Ziffern sich zu $n + 1$ ergänzen.

So ist z. B. 64718253 symmetrisch, weil $6 + 3 = 4 + 5 = 7 + 2 = 1 + 8 = 9$ ist. Symmetrisch sind daher auch die allgemein für gerades n (s. S. 125/126) gegebenen Pauls'schen Lösungen; bei unserer Schreibweise ist nämlich sofort ersichtlich, daß dort stets $a_i + a_{n+1-i} = n + 1$ ist. Es sei hier schon vorweg die Bemerkung gestattet, daß jene Pauls'sche kanonische Form, wie man auf grund der weiteren Entwicklungen dieses § leicht erkennen kann, für jedes gerade n eine einfach-symmetrische Lösung liefert außer für $n = 4$, wo dieselbe doppelt-symmetrisch ist. Für gerades n giebt es also — mit der angegebenen Ausnahme — stets einfach-symmetrische Lösungen.

Bei den doppelt-symmetrischen Lösungen ergibt bereits eine Drehung um 90° wieder das ursprüngliche Bild. Da nun jedes Feld — mit alleiniger Ausnahme des Mittelfeldes bei ungeradem n — durch eine Drehung um 90° an die Stelle eines anderen kommt, so müssen sich offenbar die Felder zu je vier oder „Quadrupeln“, wie wir sagen wollen, anordnen, so zwar, daß die Felder eines Quadrupels bei den Drehungen in einander übergehen. Wir ersehen hieraus, da immer n Felder besetzt sind, daß doppelt-symmetrische Lösungen nur dann auftreten können, wenn n durch 4 teilbar ist oder, durch 4 geteilt, den Rest 1 läßt, also z. B. für die Fälle $n = 4, 5$, dagegen nicht für $n = 6, 7$; immerhin ist auch in jenen Fällen das Auftreten von doppelt-symmetrischen Lösungen keineswegs notwendig, wie uns die Fälle $n = 8, 9$ zeigen, welche übrigens in der Hinsicht vielleicht allein dastehen dürften.

Wir erhalten nach S. 119 die aus einer gegebenen Lösung durch Drehung um 90° im umgekehrten Uhrzeigersinne resultierende Lösung, indem wir über die Ziffern unserer ursprünglichen Lösung, von links anfangend, die Platznummern $1, 2 \dots n$ setzen und nun zunächst die über der n stehende Platznummer

aufschreiben, dann die über der $n - 1$ stehende etc. Diese neue Ziffernfolge repräsentiert dann in unserer gewöhnlichen Schreibweise die neue Lösung. Soll nun die an k -ter Stelle (von links gerechnet) stehende Ziffer i bei der neuen Konfiguration wieder an k -ter Stelle stehen, so muß, da jetzt an die k -te Stelle die über $n + 1 - k$ stehende Zahl kommt, über $n + 1 - k$ eben als Platznummer i stehen. Wir können daher sagen:

Bemerkung: Die an k -ter Stelle stehende Zahl i kommt in der neuen Konfiguration dann und nur dann wieder an demselben Platze vor, wenn in der ursprünglichen $n + 1 - k$ an i -ter Stelle steht.

Nehmen wir also an, daß ursprünglich $n + 1 - k$ den i -ten Platz inne hat. Da nun auch $n + 1 - k$ seinen Platz i behaupten soll, so muß nach unserer „Bemerkung“ über $n + 1 - i$ als Platznummer $n + 1 - k$ stehen, und für die Invarianz des Platzes dieser letzteren Ziffer ($n + 1 - i$) ergibt sich dann als Bedingung, daß k an $(n + 1 - i)$ -ter Stelle steht. Dann ist aber auch diese letzte Zahl (k) invariant, weil hierfür nur erforderlich ist, daß i an k -ter Stelle steht, eine Annahme, von der wir ja ausgingen. Wir haben somit gefunden, daß die 4 Zahlen eines Quadrupels sich nach folgendem Schema anordnen, wenn $k < i \leq \frac{n}{2}$ angenommen wird, worin keinerlei Beschränkung liegt:

Platznummer: ... k ... i ... $n + 1 - i$... $n + 1 - k$...
 Schema d. Lösung: ... i ... $n + 1 - k$... k ... $n + 1 - i$...

Je 4 solcher Ziffern gehören also in einer doppelt-symmetrischen Lösung immer zusammen; die beiden äußeren haben offenbar symmetrisch gelegene Plätze in der Reihe inne, ebenso die beiden inneren. Aus diesem Schema sieht man sofort, daß eine Ziffer im allgemeinen weder gleich ihrer Platznummer sein noch diese zu $n + 1$ ergänzen kann. Wäre nämlich $i = k$, so müßte wegen der Koinzidenz der Plätze i und k nach dem obigen Schema auch $i = n + 1 - k$ oder $i = k = \frac{n + 1}{2}$ sein,

und dasselbe folgte, wenn i und k sich zu $n + 1$ ergänzten. Dies bedeutet aber offenbar: auſser dem Mittelfeld bei ungeradem n kann in einer doppelt-symmetrischen Lösung nie ein Feld einer der Diagonalen besetzt sein — was ja übrigens auch ohne weiteres einleuchtet. — Die Summe der Ziffern und ihrer bezüglichlichen Platznummern sind für unsere 4 Stellen bezw. $k + i$, $n + 1 - k + i$, $n + 1 - i + k$, $2(n + 1) - k - i$, und wenn wir die Platznummern umgekehrt, also von rechts nach links, schreiben, d. h. folgendes Schema aufstellen:

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & n + 1 - k & \dots & n + 1 - i & \dots & i & \dots & k & \dots \\ \dots & & i & & \dots & n + 1 - k & \dots & k & \dots & n + 1 - i & \dots \end{array}$$

so sind diese Summen $n + 1 - k + i$, $2(n + 1) - i - k$, $i + k$, $n + 1 - i + k$, also dieselben wie zuvor, nur in veränderter Reihenfolge. Da unser Schema nun eine Lösung darstellen soll, so müssen diese 4 Summen unter einander und von allen anderen verschieden sein, worin ja eben die Gauſs'sche Bedingung bezüglich der Läufergangart bestand (vgl. S. 131).

Denken wir uns nun die 4 Ziffern unseres Quadrupels in gerade umgekehrter Reihenfolge geschrieben, ohne daſs an dem übrigen Schema der Lösung etwas geändert wird, so erhalten wir:

$$\begin{array}{l} \text{Platznummer:} \dots \quad k \quad \dots i \dots n + 1 - i \dots n + 1 - k \dots \\ \text{Schema d. Lös.:} \dots n + 1 - i \dots k \dots n + 1 - k \dots \quad i \quad \dots \end{array}$$

Man sieht, daſs wir wieder dieselbe Summe von Ziffer und Platznummer erhalten wie oben, wenn auch in veränderter Reihenfolge, und ebenso, wenn wir die Platznummern wieder umkehren. Es stellt also auch dies neue Schema eine brauchbare Lösung dar, da offenbar auch die Bedingung bezüglich der Turmgangart erfüllt ist. Diese Umkehrung bedeutet aber offenbar nichts anderes als eine Spiegelung dieses Quadrupels an einer Seitenwand des Brettes, eine Operation, bei welcher die Eigenschaft der 4 Felder, bei allen Drehungen in sich überzugehen, offenbar auch erhalten bleibt. Wir sehen also, daſs *wir aus einer doppelt-symmetrischen Lösung eine neue erhalten nicht nur, wenn wir die ganze Kon-*

figuration, sondern auch, wenn wir nur ein oder mehrere Quadrupel von zusammengehörigen Feldern für sich an einer Wand des Brettes spiegeln.

Hierdurch ist man nun in den Stand gesetzt, auch für gröfsere Felderzahl die doppelt-symmetrischen Lösungen verhältnismäfsig leicht zu bestimmen, nämlich etwa folgendermafsen: Giebt n , geteilt durch 4, den Rest 1, so setzt man zunächst die Ziffer $\frac{n+1}{2}$ in die Mitte auf Platz $\frac{n+1}{2}$. Die übrigen $n - 1$ oder, wenn n durch 4 teilbar ist, alle n Ziffern werden nun in Quadrupel angeordnet. Auf den ersten Platz kann nach einer obigen Bemerkung jedenfalls nicht 1 kommen; wir dürfen uns ferner auf diejenigen Fälle beschränken, wo dort eine Zahl steht, welche $< \frac{n+1}{2}$ ist, weil sonst an letzter Stelle eine solche Zahl stehen würde und wir das betreffende Quadrupel nur zu spiegeln brauchten, um jene Zahl nach vorn zu bringen.

Unter Berücksichtigung dieser Momente und des S. 131 angegebenen Kriteriums bezüglich der Läufergangart, dafs nämlich die absolute Differenz zweier Zahlen nie gleich der ihrer Platznummern sein darf, erniedrigt sich die Zahl der Möglichkeiten sehr, so dafs es verhältnismäfsig schnell gelingt, die doppelt-symmetrischen Lösungen zu finden. Ist $n = 4m$, so lassen sich aus jeder Lösung durch Spiegelung von einzelnen oder allen Quadrupeln im ganzen $2^m - 1$ neue Lösungen herleiten, ebenso wenn $n = 4m + 1$ ist. Ich habe beispielshalber die doppelt-symmetrischen Lösungen bestimmt für $n = 12, 13, 16$ und 17 und teile im folgenden von je 2^m zusammengehörigen eine Stammlösung mit.

1) $n = 12$: eine Stammlösung.

5, 3, 11, 6, 12, 9, 4, 1, 7, 2, 10, 8

8 Lösungen.

2) $n = 13$: eine Stammlösung.

3, 6, 13, 5, 10, 12, 7, 2, 4, 9, 1, 8, 11

8 Lösungen.

3) $n = 16$: 4 Stammlösungen.

- 1) 4, 8, 5, 16, 14, 7, 11, 15, 2, 6, 10, 3, 1, 12, 9, 13
- 2) 5, 7, 4, 14, 16, 8, 15, 11, 6, 2, 9, 1, 3, 13, 10, 12
- 3) 7, 3, 15, 6, 8, 13, 16, 12, 5, 1, 4, 9, 11, 2, 14, 10
- 4) 8, 6, 4, 14, 7, 15, 12, 16, 1, 5, 2, 10, 3, 13, 11, 9

64 Lösungen.

4) $n = 17$: 8 Stammlösungen.

- 1) 3, 5, 17, 8, 16, 7, 12, 14, 9, 4, 6, 11, 2, 10, 1, 13, 15
- 2) 3, 7, 17, 8, 6, 13, 16, 14, 9, 4, 2, 5, 12, 10, 1, 11, 15
- 3) 4, 6, 8, 17, 7, 16, 13, 15, 9, 3, 5, 2, 11, 1, 10, 12, 14
- 4) 4, 8, 5, 17, 15, 7, 12, 16, 9, 2, 6, 11, 3, 1, 13, 10, 14
- 5) 6, 8, 5, 7, 15, 17, 14, 16, 9, 2, 4, 1, 3, 11, 13, 10, 12
- 6) 7, 3, 16, 6, 8, 14, 17, 13, 9, 5, 1, 4, 10, 12, 2, 15, 11
- 7) 7, 5, 8, 6, 16, 14, 17, 15, 9, 3, 1, 4, 2, 12, 10, 13, 11
- 8) 8, 6, 4, 15, 7, 16, 13, 17, 9, 1, 5, 2, 11, 3, 14, 12, 10

128 Lösungen.

Will man z. B. aus der für $n = 12$ angegebenen Stammlösung die übrigen 7 Lösungen herleiten, so hat man nur zu beachten, daß die Zahl 1 mit der an erster Stelle stehenden Zahl, also mit 5, zu einem Quadrupel gehört und weiter die beiden Zahlen, welche jene zu 13 ergänzen, d. h. 12 und 8; ebenso bilden 2, 3, 11, 10 ein Quadrupel und desgleichen die noch übrigen 4, so daß, wenn wir die 3 Quadrupel bezw. durch die Buchstaben a, b, c andeuten, wir die obige Lösung in der Form:

$$a \ b \ b \ c \ a \ c \ c \ a \ c \ b \ b \ a$$

$$5, 3, 11, 6, 12, 9, 4, 1, 7, 2, 10, 8$$

zu schreiben haben. Durch Spiegelung einer oder mehrerer Quadrupel erhalten wir nun die derivierten Lösungen, so z. B. durch Spiegelung von a

$$8, 3, 11, 6, 1, 9, 4, 12, 7, 2, 10, 5$$

oder durch Spiegelung von a und b

$$8, 10, 2, 6, 1, 9, 4, 12, 7, 11, 3, 5.$$

• § 7. . Anzahl der Lösungen für die entsprechenden Turm- und Läuferprobleme.

Wenn auch für das Problem der n Königinnen ein allgemeines Verfahren zur Bestimmung der Anzahl der Lösungen¹⁾ ebensowenig gefunden ist, wie für die Herstellung der Lösungen selbst, so ist jene Anzahlbestimmung doch für Turm und Läufer — die beiden Komponenten der Königin, wenn wir so sagen dürfen — ausführbar.

8 Türme auf dem Schachbrett aufzustellen, ohne daß einer den anderen schlagen kann, ist, wie schon oben (S. 129) gesagt, natürlich nur so möglich, daß in jeder Zeile wie Kolonne je ein Turm steht, mithin auf so viele Arten, als die Zahlen 1, 2 . . 8 sich in verschiedener Reihenfolge schreiben lassen, d. h. auf 8! Arten, allgemein bei einem Brett von n^2 Feldern auf $n!$ Arten.²⁾

Die entsprechende Aufgabe für Läufer ist dagegen erheblich schwieriger. Übrigens lassen sich auf einem Schachbrett auch mehr als 8 Läufer aufstellen, ohne daß einer den anderen schlägt; braucht man doch nur auf jeder der 2 Randzeilen je 7 Felder zu besetzen, so zwar, daß von je zwei schräg gegenüberliegenden Eckfeldern immer eins frei bleibt, um 14 Läufer zu haben, von denen keiner den anderen schlagen kann. — Es sei hier gleich die Zwischenbemerkung gestattet, daß man von Springern im Maximum 32, nämlich auf allen Feldern derselben Farbe, auf dem Schachbrett plazieren kann, ohne daß einer den anderen angreift, da ja der Springer bei jedem Zuge die Farbe wechselt.³⁾ Zugleich be-

1) Vgl. hierzu die Resultate auf S. 154 des Anhangs zu diesem Kapitel.

2) Anzahlbestimmungen für besondere Kategorieen von Lösungen, wie z. B. die der symmetrischen etc., findet man bei Lucas, „Sur l'Arithm. figurative“. Assoc. franç. pour l'avanc. des sc. XII. 1883. Congrès de Rouen, p. 83—97, ferner für r Türme auf einem rechteckigen Brett von pq Feldern ($r \leq \frac{p}{q}$) bei dems., Théorie des nombres. Paris 1891, p. 98.

3) Vgl. bezüglich Gangart und Farbenwechsel Kap. XI, § 1.

herrschen diese, sagen wir: auf den 32 weissen Feldern aufgestellten Springer alle schwarzen Felder; denn da man von jedem Felde mindestens 2 Springerzüge thun kann¹⁾, so muſs man von jedem schwarzen Feld zu mindestens 2 weissen Feldern, also auch umgekehrt zu jedem schwarzen Feld von mindestens 2 weissen Feldern aus durch Springerzug gelangen können. Abgesehen von einem Brett von 4 Feldern, wo 4 Springer möglich sind, sind nämlich auf einem Brett von n^2 Feldern allgemein $\left[\frac{n^2 + 1}{2} \right]$

Springer im Maximum möglich, wo durch die eckige Klammer angedeutet werden soll, daſs bei gebrochenem Wert die zu dem Bruch nächst kleinere ganze Zahl zu nehmen ist. Um zu beweisen, daſs dies wirklich die Maximalzahl ist, wollen wir hier aus Kap. XI, § 7 resp. § 10 bereits die Thatsache vorwegnehmen, daſs es für $n \geq 5$ stets möglich ist, alle n^2 Felder hintereinander mit dem Springer je einmal zu passieren. Eine solche Kette der n^2 Felder, „Rösselsprung“ genannt, denken wir uns angegeben. Sind nun auf unserem Brett a Felder mit Springern besetzt, ohne daſs einer von diesen den anderen angreift, so können von den a Feldern niemals 2 in dem Rösselsprunge einander benachbart sein, da ja sonst ein Übergang mittelst Springerzuges zwischen ihnen möglich wäre. Es muſs also in dem Rösselsprung zwischen je 2 der a Felder immer mindestens ein unbesetztes Feld sich befinden, daſs den Übergang vermittelt. Die Zahl der unbesetzten Felder muſs also mindestens gleich der der besetzten minus 1 sein, wenn nämlich die beiden Endfelder des Rösselsprungs zu den besetzten Feldern gehören, was jedoch nur bei ungeradem n möglich ist, während bei geradem n die Zahl der unbesetzten Felder mindestens gleich der der besetzten ist. Damit ist erwiesen, daſs $a \leq \left[\frac{n^2 + 1}{2} \right]$ sein muſs, wie angegeben. Da diese Maximalzahl dann und nur dann erreicht wird, wenn zwischen 2 der besetzten Felder in dem Rösselsprung sich immer gerade ein

1) Vgl. Kap. XI, § 1.

unbesetztes einschiebt, so folgt wegen des Farbenwechsels mit jedem Springerzug (s. oben) weiter, daß diese $\left[\frac{n^2+1}{2}\right]$ Felder alle von derselben Farbe sein müssen. Von den noch ausstehenden Fällen $n < 5$ ist der Ausnahmefall $n = 2$ mit 4 Springern bereits oben erledigt, während die Fälle $n = 3, 4$, in denen ein vollständiger Rösselsprung zwar nicht existiert, sich dennoch nach dem eben benutzten Prinzip erledigen und gleichfalls $\left[\frac{n^2+1}{2}\right]$ zur Maximalzahl besitzen. Bedenkt man nämlich, daß für $n = 3$ die 8 Randfelder sich mittelst Springerzüge zu einer Kette (s. in Kap. XI das Innere von Fig. 12) und für $n = 4$ sich 12 der 16 Felder einer- und die 4 übrigen andererseits zu Ketten (s. in Kap. XI das Innere von Fig. 8, wo die 4 Felder verbunden sind und die übrigen 12 sich leicht verbinden, indem man erst die vier a' , dann die c' und hierauf die d' nimmt) zusammenfassen lassen, so folgt offenbar, daß für $n = 3$ die obere Grenze 5 und für $n = 4$ dieselbe 8 ist. Diese oberen Grenzen werden aber wirklich erreicht, da so viele gleichfarbige Felder vorhanden sind. Die Gleichfarbigkeit der Felder ist jedoch hier nur hinreichend, nicht notwendig, um die Maximalzahl wirklich zu bekommen; man kann ja für $n = 3$ einen Springer auf das Mittelfeld und 4 auf die andersfarbigen Mittelrandfelder setzen, so daß also die Maximalzahl $\frac{n^2+1}{2} = 5$ auch so erreicht wird. In dem Fall $n = 4$ kann man ferner — dem obigen Rasonnement entsprechend — zunächst versuchen, von der Kette der 12 Felder etwa die 6 weißen und von der der 4 Felder die 2 schwarzen mit Springern zu besetzen. Dann sind von den weißen Feldern nur noch 2 unbesetzt, und diese allein dürfen von den besetzten schwarzen Feldern aus durch Springerzug erreichbar sein. Die besetzten schwarzen Felder dürfen also höchstens je 2 Ausgänge besitzen und müssen daher notwendig die beiden Eckfelder sein. In der That ist eine solche Aufstellung möglich, wenn die 2 leeren weißen Felder $b3$ und $c2$ (s. Fig. 1, S. 116) sind.

Die Bestimmung der Anzahl aller Lösungen für 8 Läufer auf dem gewöhnlichen Schachbrett ist von Herrn Perott¹⁾ gegeben worden, dessen Methode wir im folgenden wiedergeben: Die Aufgabe für die Läufer unterscheidet sich von den entsprechenden für Königin und Turm insofern wesentlich, als wir hier gewissermaßen 2 Arten von Figuren haben, die „schwarzen“ und die „weißen“ Läufer, d. h. die auf schwarzen resp. weißen Feldern stehenden Läufer, von denen niemals einer einen der anderen Kategorie schlagen kann. Unserer Aufgabe, 8 sich nicht schlagende Läufer auf dem Schachbrett aufzustellen, können wir uns daher in der Weise entledigen, daß wir entweder 7 weiße und einen schwarzen oder 6 weiße und 2 schwarze etc. aufstellen. Die Gesamtzahl aller dieser Möglichkeiten ist die zu bestimmende Anzahl. Die Zahl der weißen Felder für sich, wie auch die der schwarzen Felder beträgt 32. Denken wir uns nun das Schachbrett schräg so vor uns gelegt, daß wir in der Richtung der weißen Diagonale sehen, so bilden die 32 weißen Felder die von nachstehenden Kreuzen gebildete Figur:

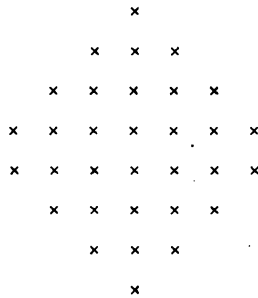


Fig. 9.

Anstatt nun zu fragen: Auf wieviel Arten lassen sich 7, 6 ... 1 Läufer auf den 32 weißen Feldern des Schachbretts aufstellen, ohne sich zu schlagen? — können wir jetzt die Frage offenbar auch so stellen: Auf wieviel Arten lassen sich 7, 6 ... 1 Türme auf den 32 Feldern der Fig. 9 aufstellen, ohne daß einer den anderen schlägt? Dieses Brett der 32 Felder denken wir uns zunächst zu einem rechteckigen vervollständigt, indem wir 4-mal je 6 Felder ansetzen. Wir deuten diese neuen Felder durch Punkte an, wie wir überhaupt in der Folge verschiedene Zeichen für die Felder gebrauchen und kurz nur von „Punkten“, „Kreisen“ oder „Kreuzen“ sprechen werden. Wir kommen so zu einem Brett von 56 Feldern:

1) Bulletin de la soc. mathém. de France t. XI, 1883, p. 173—186.

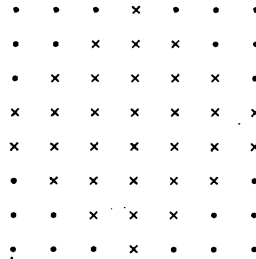


Fig. 10.

Wir wollen uns nun allgemein ein rechteckiges Brett von $p \cdot q$ Feldern in 2 Teile A und B (hier in unserem Fall einmal die Gesamtheit der 32 alten Felder und zum anderen die 24 neu hinzugekommenen) geteilt denken und die Anzahl der Möglichkeiten, auf dem Teile A i sich nicht schlagende Türme aufzustellen, mit A_i und die entsprechende Anzahl für B mit B_i und schließlich die Anzahl der Möglichkeiten, auf A s Türme und auf B zugleich deren t aufzustellen, ohne daß einer der $s + t$ den anderen schlägt, mit $A_s B_t$ bezeichnen. Es seien nun auf dem Brett im ganzen k sich nicht schlagende Türme aufgestellt ($k \leq p \leq q$) und zwar auf B deren r und auf A die übrigen $k - r$; was auf $A_{k-r} B_r$ Arten nach unserer Bezeichnung möglich ist. Diese k Türme beherrschen k Zeilen und k Kolonnen; es bleiben also noch $(p-k)(q-k)$ Felder des Bretts übrig, die von ihnen nicht beherrscht sind. Wollen wir also noch einen $(k+1)$ -ten Turm auf dem Brett plazieren, so stehen uns hierfür $(p-k)(q-k)$ Felder zur Verfügung, und wir erhalten so aus jeder Stellung der k Türme $(p-k)(q-k)$ Stellungen mit $(k+1)$ Türmen, im ganzen also $(p-k)(q-k) A_{k-r} B_r$ solche Stellungen, welche jedoch keineswegs alle verschieden sind. Der $(k+1)$ -te Turm steht entweder auf A oder auf B , und offenbar bekommen wir so zunächst alle $A_{k-r+1} B_r$ Stellungen mit $(k-r+1)$ Türmen auf A und mit r auf B , und zwar erscheint jede Stellung dabei $(k-r+1)$ -mal, da ja jeder der $(k-r+1)$ Türme von A der $(k+1)$ -te, zuletzt hinzugekommene sein konnte; wir erhalten weiter alle $A_{k-r} B_{r+1}$ Stellungen mit $(k-r)$ Türmen auf A und $(r+1)$ auf B und zwar jede dieser Stellungen $(r+1)$ -mal, so daß offenbar die Gleichung besteht:

$$(p-k)(q-k) A_{k-r} B_r = (k-r+1) A_{k-r+1} B_r + (r+1) A_{k-r} B_{r+1}.$$

Diese Rekursionsformel liefert nun, wenn alle A_i bekannt sind, aus diesen und dem trivialen Wert von B_1 successive alle B_i und alle $A_s B_t$, wie wir weiter unten noch sehen werden.

Die von Herrn Perott angewandte Methode besteht nun darin, aus einem verhältnismäßig einfachen Teil A , für welchen die A_i leicht zu

bestimmen sind, und einem anderen Teil B ein rechteckiges Brett zusammensetzen, hieraus für B die betreffenden Anzahlen zu bestimmen und mit ihm dann eventuell wieder ein weiteres rechteckiges Brett zusammensetzen u. s. f., so zwar, daß man schließlich zu dem verlangten, d. h. also hier zu dem der Fig. 10, kommt.

Wir ziehen es jedoch vor, diese Methode zunächst an ganz einfachen Fällen auseinanderzusetzen, und wählen daher ein Schachbrett von 16 Feldern mit der Aufgabe, 4 sich nicht schlagende Läufer darauf zu plazieren. Die 8 Felder gleicher Farbe bilden, in der Diagonalenrichtung angesehen, die Figur:



Fig. 11.

Diese Figur vervollständigen wir zu einer rechteckigen durch Hinzunahme von 4 Feldern (Punkten) und wenden auf die so sich ergebende Fig. 12 unsere Rekursionsformel an.



Fig. 12.

Bezeichnen wir das Gebiet der Kreuze mit B , das der Punkte mit A und beachten, daß $A_1 = 4$; $A_2 = 2$; $A_3 = 0$; $A_4 = 0$; $B_1 = 8$ ist, so liefert unsere Rekursionsformel für $k = 1$; $r = 0, 1$ die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2 A_1 &= 2 A_2 + A_1 B_1 \\ 3 \cdot 2 \cdot B_1 &= A_1 B_1 + 2 B_2, \end{aligned}$$

also $A_1 B_1 = 20$; $B_2 = 14$. Auf den 8 Kreuzen lassen sich also 2 Türme auf 14 verschiedene Arten aufstellen, ohne sich zu schlagen.

Für $k = 2$; $r = 0, 1, 2$ erhalten wir die Gleichungen:

$$\begin{aligned} 2 A_2 &= 3 A_3 + A_2 B_1 \\ 2 A_1 B_1 &= 2 A_2 B_1 + 2 A_1 B_2 \\ 2 B_2 &= A_1 B_2 + 3 B_3, \end{aligned}$$

also $A_2 B_1 = 4$; $A_1 B_2 = 16$; $B_3 = 4$.

3 Türme lassen sich also nur auf 4 verschiedene Arten auf den 8 Kreuzen aufstellen, ein Resultat, das wir allerdings schneller direkt abgeleitet hätten und das wir hier nur zur Illustration der Methode aus

der Rekursionsformel geschöpft haben. Es ist also $B_1 = 8$; $B_2 = 14$; $B_3 = 4$. Die Aufgabe der 4 Läufer für das 16-feldrige Brett kann nun in der Weise gelöst werden, daß 3 auf die weißen und 1 auf die schwarzen Felder resp. umgekehrt gesetzt werden oder aber je 2 auf jede Farbe kommen. Wir erhalten so im ganzen $2 \cdot 4 \cdot 8 + 14 \cdot 14 = 260$ Lösungen.

Auf einem Brett von 16 Feldern kann man aber bis zu 6 sich nicht schlagende Läufer plazieren; für den Fall von 5 Läufern erhält man $2 B_2 \cdot B_3 = 112$ und für den der 6 Läufer $B_3 \cdot B_3 = 16$ Lösungen.

Wir betrachten sodann noch den Fall eines ungeraden n , nämlich $n = 5$, wo im Gegensatz zu dem Fall eines geraden n die Felder der verschiedenen Farben nicht mehr in gleicher Anzahl vorkommen. Sind die Eckfelder etwa weiß, so haben wir 13 weiße und 12 schwarze Felder. Die weißen bilden das durch Fig. 13 dargestellte Gebiet, das

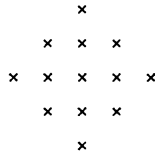


Fig. 13.

wir durch Ansetzen von 12 neuen Feldern (Punkten) zu einem Quadrat vervollständigen (s. Fig. 14).

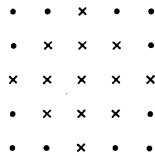


Fig. 14.

Das Gebiet der Kreuze bezeichnen wir mit X , das der Punkte mit B . Um nun zunächst die für die Berechnung der Größen X_i erforderlichen B_i zu bestimmen, gehen wir zu dem Brett der Fig. 15 über, von dem B ein Teil ist, während wir für den anderen A (Kreise) sofort angeben können: $A_1 = 4$; $A_2 = 2$; $A_3 = A_4 = 0$. Da $B_1 = 12$ ist, so ergibt

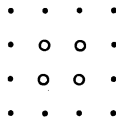


Fig. 15.

sich für $k = 1$; $r = 0, 1$ aus der Rekursionsformel:

$$\begin{aligned} 9A_1 &= 2A_2 + A_1B_1 \\ 9B_1 &= A_1B_1 + 2B_2, \end{aligned}$$

also $A_1B_1 = 32$; $B_2 = 38$. Auf 38 Arten lassen sich also auf dem Gebiet der 12 Punkte 2 sich nicht schlagende Türme aufstellen. Für $k = 2$; $r = 0, 1, 2$ erhält man:

$$\begin{aligned} 4A_2 &= 3A_3 + A_2B_1 \\ 4A_1B_1 &= 2A_2B_1 + 2A_1B_2 \\ 4B_2 &= A_1B_2 + 3B_3, \end{aligned}$$

also $A_2B_1 = 8$; $A_1B_2 = 56$; $B_3 = 32$.

Schließlich ergibt sich und zwar am schnellsten durch direkte Betrachtung: $B_4 = 4$. Sollen nämlich auf die Punkte der Fig. 15 vier sich nicht schlagende Türme gestellt werden, so muß in der zweiten Zeile jedenfalls einer stehen, was 2 Möglichkeiten giebt. Nachdem aber das betreffende Feld gewählt ist, ist auch über das der dritten Zeile mit entschieden, und es bleiben für die anderen beiden Türme noch die Mittelfelder der ersten und letzten Zeile, was wieder je 2 Möglichkeiten giebt.

Nachdem wir so $B_1 = 12$; $B_2 = 38$; $B_3 = 32$; $B_4 = 4$ bestimmt haben, wenden wir uns der Fig. 14 wieder zu und können jetzt, wo die B_i bekannt sind, offenbar mittelst der Rekursionsformel die X_i bestimmen. Wir verzichten jedoch auf eine genaue Wiedergabe der einzelnen Gleichungen und beschränken uns auf die Angabe der Resultate, nämlich $X_1 = 13$; $X_2 = 46$; $X_3 = 46$; $X_4 = 8$. Sodann betrachten wir das Gebiet der schwarzen Felder unseres 25-feldrigen Brettes; Fig. 16 stellt dies mit Y zu bezeichnende Gebiet dar. Man sieht, daß die Y_i mit den B_i in Fig. 15 übereinstimmen müssen, da ein wesentlicher Unterschied zwischen beiden Gebieten nicht besteht, indem beide

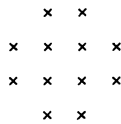


Fig. 16.

durch Hinzunahme desselben Gebietes von 4 Feldern zu einem Quadrat von 16 Feldern ergänzt werden; es ist also $Y_1 = 12$; $Y_2 = 38$; $Y_3 = 32$; $Y_4 = 4$. Die Anzahl der Lösungen unseres Problems für 25 Felder ist also:

$$X_1 \cdot Y_4 + X_2 \cdot Y_3 + X_3 \cdot Y_2 + X_4 \cdot Y_1 = 3368.$$

10*

Für die Aufstellung von 6 Läufern ergeben sich

$$X_2 \cdot Y_4 + X_3 \cdot Y_3 + X_4 \cdot Y_2 = 1960$$

Möglichkeiten, für die von 7: $X_3 \cdot Y_4 + X_4 \cdot Y_3 = 440$ und für die von 8: $X_4 \cdot Y_4 = 32$.

Für die Fälle $n = 6, 7$, für welche ich gleichfalls die Berechnung durchgeführt habe, beschränke ich mich auf kurze Angabe der Resultate, ebenso für den Fall $n = 8$, für den man die detaillierte Entwicklung in der oben citierten Perott'schen Arbeit findet.

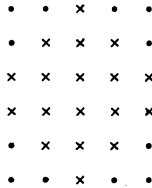


Fig. 17.

Für $n = 6$ schließt sich die Betrachtung an Fig. 17 an, in der das Gebiet X der Kreuze das der 18 gleichfarbigen Felder ist, während das andere Gebiet B der 12 Punkte wieder mit dem Gebiet B der Fig. 15 übereinstimmt, so daß die Werte der B_i bereits bekannt sind und hieraus sich leicht: $X_1 = 18$; $X_2 = 98$; $X_3 = 184$; $X_4 = 100$; $X_5 = 8$ ergeben. Die Anzahl der Lösungen für 6 Läufer ist dann 53 744.

Für $n = 7$ bilden die Felder der einen Farbe das Gebiet X (Kreuze) der Fig. 18, während der andere Teil B der Figur 18 (24 Punkte) zu-

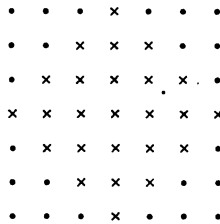


Fig. 18.

nächst an Fig. 19 studiert werden mag, wo er mit dem Gebiet A der 12 Kreise zusammen ein Rechteck bildet. Das Gebiet A der Fig. 19

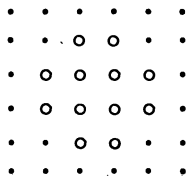


Fig. 19.

ist nun wieder identisch mit der Fig. 16 und wir haben daher: $A_1 = 12$; $A_2 = 38$; $A_3 = 32$; $A_4 = 4$, woraus durch Anwendung der Rekursionsformel auf Fig. 19 folgt: $B_1 = 24$; $B_2 = 188$; $B_3 = 576$; $B_4 = 652$; $B_5 = 208$; $B_6 = 8$. Hieraus resultiert dann schliesslich: $X_1 = 25$; $X_2 = 206$; $X_3 = 674$; $X_4 = 836$; $X_5 = 308$; $X_6 = 16$. Die Felder der anderen Farbe bilden das Gebiet Y der Fig. 20, welches,

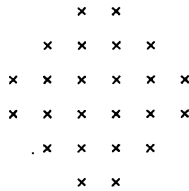


Fig. 20.

wie man leicht sieht, nur äusserlich von dem Gebiet B der Fig. 19 verschieden ist. Man erhält daher: $Y_1 = 24$; $Y_2 = 188$; $Y_3 = 576$; $Y_4 = 652$; $Y_5 = 208$; $Y_6 = 8$. Die Anzahl der Lösungen für 7 Läufer beträgt daher 1 022 320.

Für $n=8$ gehen wir auf Fig. 10 mit den beiden Teilen X (32 Kreuze) und B (24 Punkte) zurück. Die B_i sind aus Fig. 19 schon bekannt, und man findet für das Gebiet X der 32 gleichfarbigen Felder des gewöhnlichen Schachbretts:

$$X_1 = 32; X_2 = 356; X_3 = 1704; X_4 = 3532; X_5 = 2816; \\ X_6 = 632; X_7 = 16.$$

Man erhält so 22 522 960 Möglichkeiten für die Aufstellung von 8 Läufern.

Zum Schluss geben wir noch eine tabellarische Zusammenstellung der Anzahl der Lösungen für die quadratischen Schachbretter von n^2 Feldern, $n = 2, 3, \dots, 8$, und zwar für die 3 Probleme der Königin, des Turms und des Läufers (siehe Tabelle auf nächster Seite). Man beachte die merkwürdige Abnahme der Lösungszahl für das Königinenproblem von $n = 5$ zu $n = 6$, während für die beiden anderen Probleme an dieser Stelle die Anzahlen der Lösungen wachsen.

Dabei besitzt nun, wie schon mehrfach erwähnt, das Läuferproblem noch die Besonderheit, dass n Läufer noch nicht die Maximalzahl auf einem Brett von n^2 Feldern ($n \geq 2$) repräsentieren. Vielmehr ist diese Maximalzahl erst $2(n - 1)$, wie man leicht folgendermassen erkennt: Denken wir uns alle

diejenigen Felder zu einer Klasse zusammengefaßt, welche auf derselben Parallelen zu der Diagonale \diagdown liegen, so erhalten wir offenbar eine Einteilung aller n^2 Felder in

Anzahl der Lösungen für das			
n	Königin-Pr.	Turm-Pr.	Läufer-Pr.
2	0	2	4
3	0	6	26
4	2	24	260
5	10	120	3368
6	4	720	53744
7	40	5040	1022320
8	92	40320	22522960

$2n - 1$ Klassen, aufer der Diagonale \diagdown selbst je $n - 1$ auf jeder Seite von ihr. Besetzt man nun ein Feld in jeder Klasse mit einem Läufer, so beherrschen diese offenbar das ganze Brett, so dafs also $2n - 1$ jedenfalls eine obere Grenze für unsere gesuchte Zahl bildet. Von diesen Klassen bestehen nun 2 nur aus je einem Feld, nämlich die beiden Endfelder der Diagonale \diagdown ; eine Wahl bezüglich des Feldes, um den betreffenden Läufer zu plazieren, ist also bei diesen beiden Klassen ausgeschlossen. Da nun andererseits zwischen diesen beiden letzteren Feldern ein Läuferzug möglich ist, so muß eins derselben leer bleiben. Man kann also höchstens $2n - 2$ Läufer plazieren. Diese Zahl wird aber wirklich erreicht; man braucht ja nur alle Felder der untersten Zeile und von der obersten alle mit Ausnahme der Eckfelder zu besetzen.

Die Aufstellung dieser $2(n - 1)$ Läufer kann auf 2^n Arten geschehen. Bezeichnen wir nämlich das Gebiet der $\frac{n^2}{2}$ gleichfarbigen Felder eines geraden n mit A , so findet man sehr leicht, dafs bei den $n - 1$ Kolonnen von A : $A_{n-1} = 2^{\frac{n}{2}}$ ist, und zwar durch ein Schlußverfahren, wie wir es S. 147 ähnlich zur Bestimmung von B_4 in Fig. 15 oder, was dasselbe, bei Y_4 in Fig. 16 anwandten. Die Zahl aller Möglichkeiten für $2(n - 1)$

Läufer ist also hier $A_{n-1} \cdot A_{n-1} = 2^n$. Bei ungeradem n schliesslich zerfällt das Brett der n^2 Felder in ein Gebiet A von $\frac{n^2 + 1}{2}$ und in ein zweites B von $\frac{n^2 - 1}{2}$ Feldern und zwar wird hier gefunden:

$$A_{n-1} = 2^{\frac{n+1}{2}} \quad \text{und} \quad B_{n-1} = 2^{\frac{n-1}{2}},$$

also $A_{n-1} \cdot B_{n-1} = 2^n$.¹⁾

Anhang.

Zugzahlen der verschiedenen Figuren.

In diesem Abschnitt wollen wir uns damit beschäftigen, die Anzahl der verschiedenen Züge, welche die einzelnen Figuren des Schachspiels im ganzen ausführen können, festzustellen, wobei zum Schluss eine Anzahlbestimmung sich ergeben wird, welche auch für das Königinen-Problem Interesse hat. Wir beginnen mit der Figur kompliziertester Gangart, dem Springer. Das Schachbrett sei rechteckig, gebildet von p Zeilen und q Kolonnen. Die Züge des Springers²⁾ wollen wir unterscheiden als solche „erster Art“, wenn die Figur um eine Kolonne und 2 Zeilen, und solche „zweiter Art“, wenn sie um 2 Kolonnen und eine Zeile fortschreitet. Zunächst betrachten wir nur die Züge der „ersten Art“. Von den Feldern der beiden Randkolonnen werden daher, da nur nach einer Seite hin eine Bewegung möglich ist, offenbar zusammen nur ebensoviele Züge möglich sein, wie von jeder andern Kolonne. Wir rechnen daher so, als ob wir nur $q - 1$ Kolonnen hätten. Von den Feldern einer bestimmten Kolonne wird man von oben nach unten $p - 2$ Springerzüge erster Art nach jeder der beiden Seiten hin machen können, zusammen also $2(p - 2)$ und ebensoviele von unten nach oben hin, im ganzen daher $4(p - 2)$ und für

1) Lucas, Sur l'Arithmétique figurative. Assoc. franç. Congrès de Rouen 1883, p. 96/97.

2) Bezüglich der Gangart des Springers verweisen wir event. auf Kap. XI, § 1.

alle $q - 1$ Kolonnen: $4(p - 2)(q - 1)$. Dies ist also die Anzahl aller Züge der ersten Art; die der zweiten unterscheiden sich von ihnen durch Vertauschung der Begriffe Zeile und Kolonne, und ihre Anzahl ist daher offenbar $4(q - 2)(p - 1)$. Die Anzahl aller überhaupt möglichen Springerzüge ist also:

$$(1) \quad 2[(2p - 3)(2q - 3) - 1],$$

speziell für das gewöhnliche Schachbrett 336. Dabei ist der Zug von a nach b als verschieden gerechnet von dem in umgekehrter Richtung, d. h. von b nach a .

Fassen wir den Zug einer allgemeineren Figur ins Auge, deren Gangart darin besteht, daß sie sich erst von dem Ausgangsfeld um r Kolonnen nach einer der beiden Seiten fortbewegt und dann in der betreffenden Kolonne um s Zeilen (Züge „erster Art“) resp. erst um s Kolonnen und dann um r Zeilen (Züge „zweiter Art“), so erhalten wir die Anzahl der Züge dieser allgemeineren Figur offenbar in ganz analoger Weise. Für die Züge der ersten Art zählen die zweimal r letzten Kolonnen zusammen nur soviel wie r andere Kolonnen; wir dürfen also nur $p - r$ Kolonnen rechnen. Von den Feldern jeder dieser $p - r$ Kolonnen sind $4(q - s)$ Züge möglich, also im ganzen Züge erster Art

$$4(p - r)(q - s)$$

und überhaupt

$$(1^a) \quad 2[(2p - r - s)(2q - r - s) - (r - s)^2]. \quad 1)$$

Man sieht leicht, daß sobald r oder $s = 0$ sind oder aber $r = s$ ist, je zwei Züge zusammenfallen und dann von der Zahl (1^a) die Hälfte genommen werden muß.

Die Zahl der Züge des Königs, der bekanntlich auf jedes dem seinigem benachbarte Feld nach allen Seiten hin ziehen darf, ergibt sich aus (1^a) sofort, wenn wir einmal $r = 1$, $s = 0$ und zweitens $r = 1$, $s = 1$ setzen, wobei beide Male aber nur die Hälfte von (1^a) zu nehmen ist; wir erhalten so

$$(2) \quad 2(4pq - 3p - 3q + 2).$$

1) S. Lucas, Récréat. t. IV, p. 130.

Für den Turm ergibt sich die gesuchte Zahl am einfachsten direkt, indem man sofort sieht, daß derselbe von jedem Feld auf $p + q - 2$ andere ziehen kann, woraus als Gesamtzahl seiner Züge

$$(3) \quad pq(p + q - 2)$$

folgt.

Die Anzahl der Züge beider Läufer zusammengenommen auf einem quadratischen Brett von p^2 Feldern ist offenbar gleich der Anzahl, welche wir aus der Hälfte von (1*) erhalten, wenn wir $r = s$ setzen und beide alle Werte von 1 bis $p - 1$ durchlaufen lassen. Wir bekommen so die Zahl:

$$\sum_1^{p-1} (2p - 2r)^2 = 4 \sum_1^{p-1} (p - r)^2 = \frac{2p(p-1)(2p-1)}{3},$$

also für jeden der Läufer

$$(4) \quad \frac{p(p-1)(2p-1)}{3} \text{ Züge.}$$

Will man dieses Resultat direkt ableiten, so kann man folgendermaßen verfahren: Zunächst fassen wir die Züge beider Läufer, welche von den $4(p - 1)$ Randfeldern ausgehen, ins Auge. Von jedem derselben aus lassen sich, wie ein Blick auf das Brett sofort zeigt, $p - 1$ Züge thun, also im ganzen $4(p - 1)^2$. Unter diesen befinden sich nun einige Paare, welche zu einander reziprok sind, nämlich diejenigen, welche von einem Randfeld zu einem Randfeld führen. Von jeder der 4 Ecken aus läßt sich nur je ein Randfeld erreichen, dagegen von jedem der anderen $4(p - 2)$ Randfelder aus je 2 Randfelder, so daß in unserem obigen Ausdruck $4(p - 2) + 2$ Paare zu einander reziproker Züge vorkommen und daher der Ausdruck

$$2[4(p - 1)^2 - 4(p - 2) - 2]$$

uns die Zahl aller Züge liefert, welche von oder nach einem Randfeld führen. Wir dürfen uns danach für die weitere Berechnung auf die Züge auf dem Brett der inneren $(p - 2)^2$ Felder beschränken und wenden hier nun dasselbe Raisonement an, indem wir die Züge von und nach den Randfeldern dieses reduzierten Brettes bestimmen und dafür die Zahl

$$2[4(p-3)^2 - 4(p-4) - 2]$$

erhalten u. s. f. Durch Addition dieser Ausdrücke erhält man dann leicht die schon auf anderem Wege von uns abgeleitete Zahl (4).

Da die Königin dieselben Züge macht, wie beide Läufer und ein Turm zusammen, so ergibt sich als ihre Anzahl

$$(5) \quad \frac{2p(p-1)(5p-1)}{3}$$

Hiernach läßt sich leicht folgende, schon oben angekündigte Anzahlbestimmung ausführen: Wie viele Möglichkeiten giebt es, 2 Königinnen auf einem Brett von p^2 Feldern so aufzustellen, daß sie sich nicht gegenseitig schlagen können?

Von allen $\binom{p^2}{2}$ Kombinationen von je 2 Feldern sind offenbar alle diejenigen auszuschneiden, welche einen Zug der Königin angeben, wobei jetzt aber zwei reziproke Züge nur einmal gezählt werden, mithin

$$\frac{p(p-1)(5p-1)}{3};$$

es bleiben also¹⁾

$$\frac{p(p-1)(p-2)(3p-1)}{6}.$$

Für die Aufstellung dreier Königinnen ergeben sich nach Herrn Landau²⁾ folgende Anzahlen: für gerades p :

$$\frac{1}{12}p(p-2)^2(2p^3 - 12p^2 + 23p - 10),$$

und für ungerades p :

$$\frac{1}{12}(p-1)(p-3)(2p^4 - 12p^3 + 25p^2 - 14p + 1).$$

1) s. Mantel „Sur les combinaisons d'éléments dispersés dans un plan.“ Assoc. franç. pour l'avanc. des sc. Congrès de Rouen, 1883, p. 171—175.

2) „Über das Achtdamenproblem und seine Verallgemeinerung“ Naturw. Wochenschrift 2. Aug. 1896. — Weitere hierhergehörige Formeln, nämlich für 2, 3, 4 Königinnen auf Brettern von bzw. $2n$, $3n$, $4n$ Feldern entwickelte H. Tarry auf dem Kongress der Assoc. franç. pour l'avanc. des sc. zu Limoges 1890 (vgl. Lucas, Récréat. t. I, p. 231); vgl. auch E. Pauls, Deutsche Schachz. Bd. 29, 1874, p. 261—263.

Auch für das entsprechende Problem des Königs sind derartige Anzahlbestimmungen noch kürzlich gewünscht worden.¹⁾ Für die Aufstellung zweier Könige ergeben sich nach (2) sofort

$$\frac{1}{2} (p - 1) (p - 2) (p^2 + 3p - 2)$$

Möglichkeiten und

$$\frac{1}{6} (p - 1) (p - 2) (p^4 + 3p^3 - 20p^2 - 30p + 132)$$

für die von 3 Königen.²⁾

Zum Schluß noch einige Bemerkungen über die Anzahl der Züge, welche für die verschiedenen Figuren von den einzelnen Feldern des gewöhnlichen Schachbretts aus möglich sind: Der Turm hat von jedem Felde aus 14 Züge; der Läufer von

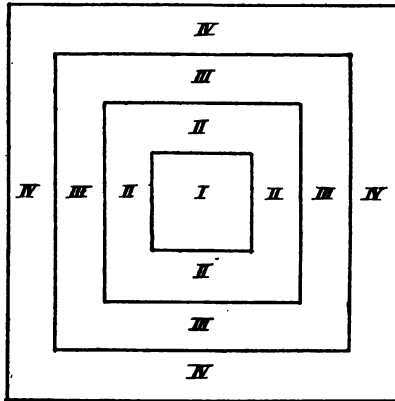


Fig. 21.

jedem Felde des Gebietes I (s. Fig. 21) 13 und von den Feldern der Gebiete II, III, IV bezw. je 11, 9 und 7 Züge, daher die Königin von den Feldern der Gebiete I, II, III, IV resp. 27, 25, 23,

1) Intermédiaire des mathématiciens t. IV, 1897, p. 6. Question 974.

2) Diese Formel, welche ich einer brieflichen Mitteilung des Herrn Dr. E. Landau-Berlin verdanke, ergibt sich in analoger Weise wie die entsprechende in der „Naturw. Wochenschr.“ (s. Anm. 2 auf voriger Seite) abgeleitete Formel des Königinen-Problems.

21 Züge. Der König hat auf I, II, III überall 8 Züge und auf IV je 5 mit Ausnahme der 4 Eckfelder, von wo ihm nur je 3 Felder offen stehen. Die Anzahl der Springerzüge schwankt zwischen 2 und 8 (s. Kap. XI, § 1). Die Maximalzahlen für König, Königin, Turm, Läufer, Springer sind also bezw. 8, 27, 14, 13, 8, so daß also zunächst als obere Grenze aller vom König und seinen 7 Offizieren ausführbaren Züge 105 erscheint. In Wirklichkeit läßt sich allerdings keine Aufstellung so angeben, daß diese Gesamtzugzahl wirklich erreicht wird; als das Maximum erscheint vielmehr 100, indem sich die Figuren immer entweder gegenseitig bei einigen Zügen im Wege stehen oder aber einige, um die anderen nicht zu hindern, auf die Felder ihrer Maximalzugzahl verzichten müssen.¹⁾ Es giebt sogar nur 2 Stellungen²⁾, in denen dieses Maximum erreicht wird, nämlich (in der Notation der Fig. 1, Kap. VII, S. 85):

- 1) König $d2$; Königin $b3$; Läufer $e4$ und $d4$; Springer $d6$ und $f4$; Turm $c7$; Turm $g5$
- 2) König $d2$; Königin $b3$; Läufer $e4$ und $d4$; Springer $d6$ und $f4$; Turm $c7$; Turm $a5$,

wobei König, Läufer, Türme und Springer $f4$ ihre Maximalzahlen von Zügen haben, während die Königin deren nur 23 und Springer $d6$ deren nur 7 hat.

Für den feindlichen König verbleiben dabei in jedem der Fälle noch mehrere Felder, ohne daß er im Schach steht, z. B. $d8$, $f1$, $f8$, $h2$, $h4$, $h6$ in beiden Fällen.

1) Die Frage nach dieser Maximalzahl wurde aufgeworfen in der Berliner Schachzeitung 1848, III, p. 363.

2) Die erste der beiden Lösungen wurde gegeben Berl. Schachz. IV, 1849, p. 40. Herr E. Landau bewies sodann, daß nur die angegebenen 2 Stellungen das Verlangte leisten (Schachfreund, herausgeg. von der Berliner Schachgesellschaft, Jahrg. II, 1899, p. 97—99).

Kapitel X.

Die 5 Königinnen auf dem Schachbrett.

Die Schachspieler sind gemüthliche Leute, sie treiben keine Politik.

BISMARCK.

Wenn auf dem Schachbrett Bauern zu Wesiren) werden,
So sind dafür Wesire Bauern hier auf Erden.*

Aus einem Gedicht des Muhammed ibn Scherph,
übers. v. Hammer.

In dem vorhergehenden Kapitel beschäftigte uns ein Problem, bei dem es sich um die Aufstellung einer Maximalzahl von Königinnen auf dem Schachbrette handelte; das gegenwärtige Kapitel soll uns ein Seitenstück hierzu bieten, nämlich die *Aufstellung einer Minimalzahl von Königinnen mit der Bedingung, daß dieselben alle Felder des Schachbretts beherrschen*. Diese Aufgabe ist verschiedentlich gestellt worden¹⁾ und zwar sowohl mit der weiteren Forderung, daß keine der Königinnen von einer anderen angegriffen wird²⁾, wie auch mit der, daß das mit einer Königin besetzte Feld nicht als „beherrscht“ gilt, sondern noch von wenigstens einer der anderen Königinnen angegriffen sein muß.³⁾ Je nachdem wir also von diesen weiteren

1) Eine eingehendere Behandlung hat, soviel wir sehen, dies Problem nirgends gefunden; je eine Lösung für das gewöhnliche Schachbrett fanden wir bei Bilguer, Handbuch des Schachspiels, 7. Aufl., 1891, p. 23 (von diesem entnommen aus Jaenisch, *Traité des applicat. de l'anal. mathém. au jeu des échecs*) und in der in der folgenden Anm. citierten Arbeit von Pauls.

2) s. E. Pauls. „Das Maximalproblem der Damen auf dem Schachbrette.“ *Deutsche Schachzeitung* Bd. 29, 1874, p. 266.

3) Max Lange, *Mathem. Schachfragen*. *Schachzeitung* XVIII, 1863, p. 206; s. auch v. dems. *Lehrbuch des Schachspiels*. 2. Aufl. 1865.

*) „Wesir“ für unser „Königin“. Ich entnehme dies Wort aus A. v. d. Linde, *Gesch. u. Litt. des Schachspiels* II, p. 257.

Bedingungen ganz absehen oder aber die erste oder zweite acceptieren, haben wir 3 verschiedene Probleme, welche wir im folgenden bezw. als das Hauptproblem, das Problem mit „Angriffsverbot“ und das mit „Angriffsforderung“ unterscheiden wollen.

Fassen wir zunächst, wie in Kap. IX, die einfachsten Bretter ins Auge, so finden wir, daß für ein vier- und neunfeldriges Brett *eine* Königin alle Felder beherrschen kann und zwar für $n = 2$ von jedem Feld, für $n = 3$ vom Mittelfeld aus. Bei „Angriffsforderung“ sind allerdings 2 Königinnen erforderlich. Für $n = 4$ braucht man 2 Königinnen, für welche sich in der bekannten Notation (s. Kap. VII, § 1) folgende Stellungen ergeben:

- 1) $a1, c3$
- 2) $a2, d2$
- 3) $b2, b3,$

wo jede der 3 Stellungen als Repräsentant von je 4 Lösungen erscheint¹⁾, so daß der Fall $n = 4$ im ganzen 12 Lösungen und zwar alle mit gegenseitigem Angriff aufweist.

Ein Brett von 25 Feldern erfordert 3 Königinnen; wir geben im folgenden die verschiedenen Lösungen für das Hauptproblem, indem wir neben jede Stammlösung die Zahl der von ihr repräsentierten Stellungen (2, 4, 8) setzen und weiter durch *F.* resp. *V.* andeuten, daß der Bedingung der Angriffs-Forderung resp. des Angriffs-Verbots genügt wird:

1) $a1, a3, d3$	8 Lös.	<i>F.</i>	9) $a1, b4, e4$	8 Lös.	<i>V.</i>
2) $a1, a5, d3$	4 „		10) $a1, b4, d3$	8 „	
3) $a1, b2, d4$	4 „	<i>F.</i>	11) $a1, b4, d2$	4 „	
4) $a1, c3, e5$	2 „	<i>F.</i>	12) $a1, b5, d3$	8 „	
5) $a1, c3, c4$	8 „	<i>F.</i>	13) $a1, b5, e2$	4 „	
6) $a1, d4, d3$	8 „	<i>F.</i>	14) $a1, c4, d3$	4 „	
7) $a1, b3, c2$	4 „		15) $a1, c5, e3$	4 „	
8) $a1, b3, e3$	8 „		16) $a1, c5, d3$	8 „	

1) Die grundlegenden Ausführungen des vorigen Kap. müssen wir in diesem voraussetzen und verweisen daher an dieser Stelle event. auf § 3 dort.

17)	$a2, a4, e3$	4 Lös.		27)	$a2, c5, e2$	4 Lös.	
18)	$a2, a4, c3$	4 „		28)	$a2, d2, d5$	4 „	<i>F.</i>
19)	$a2, b1, c3$	4 „		29)	$a3, b3, e3$	4 „	<i>F.</i>
20)	$a2, b1, c5$	8 „		30)	$a3, d3, c3$	4 „	<i>F.</i>
21)	$a2, b1, d4$	4 „		31)	$b2, b3, b4$	4 „	<i>F.</i>
22)	$a2, b3, e3$	8 „	<i>F.</i>	32)	$b2, c3, d4$	2 „	<i>F.</i>
23)	$a2, c3, d5$	4 „		33)	$b2, b4, d4$	4 „	<i>F.</i>
24)	$a2, c3, d3$	8 „		34)	$b2, b4, d3$	4 „	
25)	$a2, c3, e2$	4 „		35)	$b3, c3, d3$	2 „	<i>F.</i>
26)	$a2, c4, e2$	4 „	<i>F.</i>	36)	$b3, c3, c4$	4 „	<i>F.</i>

Es gibt also im ganzen für $n = 5$: $11 \cdot 8$ unsymmetrische, $22 \cdot 4$ einfach- und $3 \cdot 2$ doppelt-symmetrische = 182 Lösungen; davon genügen der Bedingung *F*: $4 \cdot 8 + 8 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 70$ Lösungen und der Bedingung *V*: $2 \cdot 8 = 16$.

Für 36 Felder braucht man schon 4 Königinnen (3 Damen beherrschen höchstens 35 Felder, z. B. $a3, d3, f6$ alle Felder aufser $e1$) und erhält unter der Bedingung *V* folgende 17 Stamm-lösungen:

1)	$c4, b6, f3, e1$	8 Lös.	9)	$b3, a5, f2, c6$	8 Lös.
2)	$c4, d6, a1, f2$	8 „	10)	$b3, a6, d2, f5$	8 „
3)	$c4, d6, a1, f3$	8 „	11)	$b3, c6, e1, f4$	8 „
4)	$b2, e6, a5, f3$	8 „	12)	$b3, d6, e1, f5$	8 „
5)	$b2, d5, a4, e1$	8 „	13)	$a5, b1, f2, e6$	2 „
6)	$b2, d5, a6, e3$	8 „	14)	$a5, b1, f2, c6$	8 „
7)	$b2, a5, e6, f1$	8 „	15)	$a5, c1, f3, d6$	8 „
8)	$b3, a1, c6, f2$	8 „	16)	$a5, d1, f2, c6$	4 „
	17)	$a4, c1, d6, f3$		2 Lös.	

im ganzen also 120 Lösungen *V*.

Es mögen für das Hauptproblem dieses Falles wenigstens noch die doppelt-symmetrischen Lösungen angeführt werden; es sind dies aufser den obigen 13) und 17):

- 1) $b2, b5, e2, e5$
- 2) $c3, c4, d3, d4,$

die beide der Bedingung F genügen, so zwar, daß hier sogar jede Königin jede andere angreift.

Auch für $n = 7$ reichen noch 4 Königinnen aus. Besetzt man nämlich das 36-feldrige Brett mit 3 Königinnen auf $c4$, $c5$, $d1$, so werden alle Felder außer den Diagonalfeldern $b2$ und $f6$ beherrscht, und eine vierte Königin auf $g7$ beherrscht diese beiden und das beim Übergang von 36 zu 49 Feldern neu hinzukommende Randgebiet. Doppelt-symmetrische Lösungen giebt es in diesem Falle nicht.

Für das gewöhnliche Schachbrett braucht man, wie wir schon in dem Titel dieses Kapitels angedeutet haben, 5 Königinnen. Die Zahl aller Lösungen für das Hauptproblem dürfte außerordentlich groß sein; wir verzichten daher auf eine Ermittlung dieser, jedoch geben wir in der folgenden Zusammenstellung alle Lösungen bei Angriffsverbot:

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 1) $a1, b3, c5, d2, e4$ | 21) $a1, b4, e8, g2, h7$ |
| 2) $a1, b3, c7, f2, g6$ | 22) $a1, b5, c7, e6, f2$ |
| 3) $a1, b3, c8, d2, h7$ | 23) $a1, b5, c7, f2, g6$ |
| 4) $a1, b3, c8, e2, h6$ | 24) $a1, b5, c7, g2, h6$ |
| 5) $a1, b3, d7, f2, g6$ | 25) $a1, b5, e3, g8, h2$ |
| 6) $a1, b3, d8, f2, g6$ | 26) $a1, b5, e4, f8, h2$ |
| 7) $a1, b3, e8, f5, h2$ | 27) $a1, b5, e4, g8, h2$ |
| 8) $a1, b3, e8, g5, h2$ | 28) $a1, b5, e6, f8, h2$ |
| 9) $a1, b3, f8, g2, h7$ | 29) $a1, b5, e7, g4, h2$ |
| 10) $a1, b4, c7, f3, g6$ | 30) $a1, b6, d3, g8, h4$ |
| 11) $a1, b4, c8, f3, h6$ | 31) $a1, c4, d7, g3, h6$ |
| 12) $a1, b4, c8, g3, h5$ | 32) $a1, c4, d8, f3, h6$ |
| 13) $a1, b4, d5, e8, h2$ | 33) $a1, c4, d8, f3, h7$ |
| 14) $a1, b4, d7, e2, g5$ | 34) $a1, c4, d8, g3, h7$ |
| 15) $a1, b4, d7, e2, g6$ | 35) $a1, c4, e8, f3, h6$ |
| 16) $a1, b4, d7, f2, g5$ | 36) $a1, c5, d8, f3, h6$ |
| 17) $a1, b4, d7, f2, g6$ | 37) $a1, c5, e8, f3, h2$ |
| 18) $a1, b4, d7, g2, h6$ | 38) $a1, c5, e8, f3, h6$ |
| 19) $a1, b4, d8, f2, h6$ | 39) $a1, c7, d5, e8, h4$ |
| 20) $a1, b4, e8, f5, h2$ | 40) $a1, e6, f8, g5, h7$ |

- | | |
|--------------------------|----------------------------|
| 41) $a2, b4, c1, d3, e5$ | 62) $a2, c7, d4, f1, g6$ |
| 42) $a2, b4, e8, f1, g7$ | 63) $a2, c7, d4, f1, h5$ |
| 43) $a2, b4, c8, f3, g7$ | 64) $a2, c7, e3, f8, h5$ |
| 44) $a2, b6, c1, e7, h3$ | 65) $a2, c7, e4, f1, h5$ |
| 45) $a2, b6, c8, e7, f3$ | 66) $a2, c7, e4, f1, h6$ |
| 46) $a2, b6, e1, f5, g7$ | 67) $a2, c7, e8, f1, h4$ |
| 47) $a2, b7, d1, e3, f6$ | 68) $a2, c8, d3, e1, h6$ |
| 48) $a2, b7, d1, e5, h6$ | 69) $a2, c8, d4, e1, h5$ |
| 49) $a2, b7, d1, f8, g3$ | 70) $a2, d6, e1, f5, g7$ |
| 50) $a2, b7, d3, e8, g5$ | 71) $a2, d6, e4, g5, h3$ |
| 51) $a2, b7, d4, f1, g6$ | 72) $a2, d7, e1, f8, g6$ |
| 52) $a2, b7, d6, e1, h5$ | 73) $a3, b7, d1, e8, f4$ |
| 53) $a2, b7, d8, e3, f5$ | 74) $a3, c7, d4, e1, g5$ |
| 54) $a2, b7, e3, f6, g4$ | 75) $a3, c8, d4, f1, h6$ |
| 55) $a2, b7, e3, f6, h5$ | 76) $a3, c8, d5, e1, h6$ |
| 56) $a2, b7, e3, f8, g4$ | 77) $a3, c8, d5, f2, g6$ |
| 57) $a2, b7, e3, f8, h5$ | 78) $a4, b2, d8, e1, h5$ |
| 58) $a2, b8, c3, g1, h7$ | 79) $a4, b6, c3, f7, g2$ |
| 59) $a2, c5, e8, f3, h6$ | 80) $a4, c3, d6, f5, g2$ |
| 60) $a2, c6, d1, f4, h7$ | 81) $a4, d8, e3, f5, g2$ |
| 61) $a2, c6, e3, f8, h5$ | 82) $b3, c6, d4, e2, f5$ |
| | 83) $b4, c2, d5, e3, f6$. |

Auch für $n = 9$ teilen sich 5 Königinnen in die Herrschaft über das ganze Brett; unter den Lösungen dieses Falles giebt es folgende doppelt-symmetrische:

- 1) $a2, b9, h1, i8, e5$
- 2) $a3, c9, g1, i7, e5$
- 3) $a4, d9, f1, i6, e5$
- 4) $b3, c8, g2, h7, e5$
- 5) $b4, d8, f2, h6, e5$
- 6) $c4, d7, f3, g6, e5$,

welche alle der Bedingung V genügen.

Für $n = 10$ ist die Minimalzahl 6; eine Lösung, bei der alle Königinnen derselben Diagonale angehören, ist $a1, c3, e5, f6, g7, i9$.

Für $n = 11$ sind schon 7 Königinnen nötig; eine passende Aufstellung erhält man z. B., indem man zuerst für das 100-feldrige Brett eine solche mit 6 Damen giebt und dann die siebente auf das neu hinzutretende Eckfeld setzt.

Für $n = 12$ genügen jedenfalls 8 Damen; $a1, c3, e5, f6, g7, h8, i9, l11$ ist eine Lösung mit allen Damen auf derselben Diagonale.

Für $n = 15$ ist jedenfalls 9 die Minimalzahl; eine doppelt-symmetrische Stellung für diesen Fall ist:

$a2, b15, o1, p14$ (erstes Symmetriequadrupel)
 $c9, g3, n7, i13$ (zweites „)
 $h8$ (Mittelfeld).

Dabei erhält man, ganz wie in Kap. IX, § 6, aus dieser Stammlösung andere Lösungen nicht nur durch Spiegelung der ganzen Konfiguration, sondern auch durch Spiegelung eines Symmetriequadrupels allein.

Eine Methode von vielleicht etwas allgemeinerer Bedeutung, dargelegt an dem Beispiel $n = 11$, besteht in folgendem: Man besetzt die Felder einer 6-feldrigen schrägen Linie, nämlich $a6, b5, c4, d3, e2, f1$; diese 6 Damen beherrschen dann 6 Zeilen und 6 Kolonnen und von dem Quadrat der übrig bleibenden 25 Felder auch noch alle Felder von der Farbe der besetzten. Die Felder der anderen Farbe können aber durch eine (siebente) Königin auf $i9$ beherrscht werden. Für $n = 17$ ergibt sich nach dieser Methode eine Lösung, wenn man bedenkt, daß auf einem 81-feldrigen Brett die Felder der Diagonalfarbe von 3 Damen, $e3, e5, e7$, beherrscht werden; es brauchen dann nur noch 8 Damen auf eine schräge Linie gestellt zu werden.

Wie mir Herr Dr. E. Landau freundlichst mitgeteilt hat, kann man auch Lösungen des Maximalproblems (Kap. IX) bisweilen hier verwerten, nämlich folgendermaßen: 5 Damen auf dem gewöhnlichen Schachbrett, welche auf den Kolonnen $a—e$ und den Zeilen 1—5 stehen und von denen keine eine andere angreift (Lösung des Maximalproblems für 25 Felder), beherrschen jedenfalls 5 Zeilen und 5 Kolonnen, so daß nur

noch 9 Felder übrig bleiben. Diese 9 Felder gehören 5 verschiedenen, unter sich parallelen schrägen Linien an und sind also angegriffen, wenn von den 5 Damen je eine in einer dieser 5 schrägen Linien steht; vgl. hierzu die Lösungen 1) und 41) unserer Tabelle, von denen die zweite durch Parallelverschiebung der ersten Konfiguration längs der Diagonale und Drehung des Brettes entsteht.

Für den Fall $n = 11$ haben wir hiernach zu rekurrieren auf das Maximalproblem der 7 Königinnen, von dessen 6 Stammlösungen (S. 122) die folgenden 3 hier passend sind:

- 1) $a1, b3, c5, d7, e2, f4, g6$
- 2) $a2, b4, c1, d7, e5, f3, g6$
- 3) $a2, b5, c1, d4, e7, f3, g6$.

Da nach Franel¹⁾ das Maximalproblem für m^2 Felder stets die Lösung $a_i \equiv 1 + 2i \pmod{m}$; $i = 0, 1 \dots m - 1$ besitzt, wenn $m \equiv \pm 1 \pmod{6}$ ist, so ist diese Landau'sche Methode für das Minimalproblem der n^2 Felder jedenfalls wenigstens dann stets anwendbar, wenn $n \equiv 2$ oder $8 \pmod{9}$ ist.

Was ferner die übrigen Figuren des Schachspiels anlangt, so fällt für den Turm, der von jedem Platz aus eine konstante Zahl von Feldern (14) beherrscht, das Minimalproblem mit dem Maximalproblem des vorigen Kapitels völlig zusammen, falls auch jetzt das Angriffsverbot statuiert wird; jedenfalls sind 8 Türme erforderlich, um das ganze Brett zu beherrschen. Bei Angriffsforderung stelle man alle 8 etwa in dieselbe Zeile oder Kolonne. Auch von Läufern sind 8 zur Beherrschung des ganzen Brettes erforderlich, 4 von jeder Farbe. Man setze dieselben etwa alle auf eine der beiden mittleren Zeilen resp. Kolonnen oder z. B. auf $c3, c5, g3, g5$ und entsprechende 4 weiße Felder etc.

Für den Springer ist die Frage unter der Bedingung des Angriffsverbots im Intermédiaire des mathématiciens t. III, 1896, p. 58 (Question 786) und zwar allgemein für ein Brett von n^2 Feldern gestellt worden, ohne jedoch bisher eine erledigende Antwort gefunden zu haben. Für 16 Felder sind

1) Interméd. des mathématiciens t. I, 1894, p. 67.

mindestens 4 Springer nötig; denn es ist unmöglich, von einem Platz aus auch nur 2 Eckfelder zugleich anzugreifen; andererseits geben aber auch 4 Springer, auf die 4 Mittelfelder gesetzt, eine Lösung. Für das gewöhnliche Schachbrett müssen hiernach jedenfalls 16 Springer ausreichen, je 4 für jeden Quadranten; immerhin ist es sehr wohl möglich, daß auch schon eine kleinere Zahl genügt; bei Aufhebung des Angriffsverbots ist dies sogar sicher der Fall. Für den Fall eines Bretts von 121 Feldern hat Ericsson (Pseudonym)¹⁾ eine interessante Lösung mit 22 Springern angegeben, die wir in nachfolgender Figur wiedergeben:

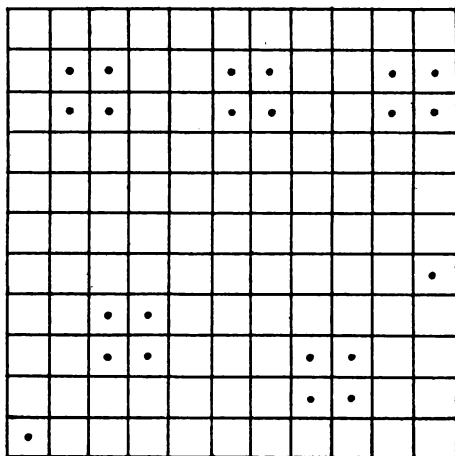


Fig. 1.

Was schließlich den König betrifft, so sind von dieser Figur auf dem gewöhnlichen Schachbrett bei Angriffsforderung sechzehn²⁾, ohne diese Bedingung resp. bei Angriffsverbot dagegen nur neun erforderlich, wie man sehr leicht sieht.

1) Interméd. des mathém. t. V, 1898, p. 230.

2) s. M. Lange, Maxima und Minima. Schachzeitung XIX, 1864, p. 78.

Kapitel XI.

Der Rösselsprung.

§ 1. Einleitung. Definitionen und Vorbemerkungen.

„Eines Tages befand ich mich in einer Gesellschaft“, — so erzählt der berühmte Mathematiker Leonhard Euler¹⁾ — „als bei Gelegenheit des Schachspiels jemand die Frage aufwarf, *mit dem Springer bei gegebenem Anfangsfeld alle Felder des Schachbretts der Reihe nach, jedes nur einmal, zu passieren*“. Wenn auch Euler bisher unbekannt, war das Problem nichts weniger als neu, sondern schon viel früher in diversen Schriften des Orients wie Occidents behandelt worden.²⁾ Immerhin wird man erst in jener Arbeit Euler's die Grundlage einer mathematischen Theorie unserer Aufgabe, des sogenannten „Rösselsprungs“, erblicken dürfen, umsomehr als sich bei ihm mehrere der späteren Untersuchungsrichtungen bereits im Keime vorfinden. Übrigens scheint auch erst durch Euler's Untersuchungen das Problem, das heute bekanntlich in dem Rätsel-Repertoire zahlreicher Familien-Journale einen ständigen Platz

1) „Solution d'une question curieuse qui ne paroît soumise à aucune analyse“. Histoire de l'académie royale des sciences de Berlin tome XV, 1759, p. 310 oder Commentationes arithm. coll. Petersburg 1849, Bd. I, p. 337.

2) s. A. v. d. Linde, „Gesch. und Litter. des Schachspiels.“ Berlin 1874, wo unter zahlreichen historischen Nachweisen als älteste europäische Quelle der lateinische Pergamentkodex Nr. 10 287 der öffentl. Bibl. zu Paris (erste Hälfte des XIV. Jahrh.) angeführt wird (l. c. I, p. 294).

einnimmt, weiteren Kreisen bekannt geworden zu sein.¹⁾ Als ein Beweis für das unserer Aufgabe entgegengebrachte allgemeine Interesse mag der Kuriosität halber noch erwähnt werden, daß im Krystallpalast in London ein Automat Rösselsprünge bildet, wobei der Besucher das Ausgangsfeld beliebig vorzuschreiben berechtigt ist.²⁾

Ein „Springerzug“ besteht bekanntlich darin, daß die Figur von ihrem Felde nach einer der beiden Seiten um 2 Felder in horizontaler und dann von hier um 1 in vertikaler Richtung resp. zuerst um 2 in vertikaler und dann um 1 in

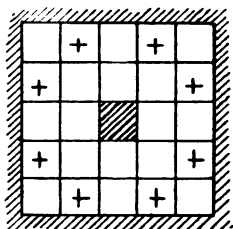


Fig. 1.

horizontaler Richtung fortschreitet. Von 2 Feldern, zwischen denen ein Übergang vermittelt eines solchen Springerzuges möglich ist, sagt man: „sie rösseln sich“. Die Maximalzahl der mit einem gegebenen Felde sich rösselnden Felder ist offenbar 8 (s. Fig. 1, wo ein Teil des Schachbretts und darauf ein schraffiertes Feld mit allen dasselbe

rösselnden, durch Kreuze markierten Feldern dargestellt ist). Andere Felder des Bretts rösseln nur 6, 4, 3 und die Eckfelder sogar nur 2 Felder. Man sieht leicht, daß auf einem zweifarbigem Brett (s. Kap. VII, Fig. 1) jeder Springerzug mit Farbenwechsel des Feldes verbunden ist.

Das erste Feld eines Rösselsprungs nennen wir „Anfangs-“ oder „Ausgangsfeld“, das letzte „Schlußfeld“, beide gemeinsam die „Endfelder“. Rösseln sich Anfangs- und Schlußfeld, so nennt man den Rösselsprung „geschlossen“, anderen-

1) „Gegen den Euler'schen Rösselsprung der Ratten zog er nur mit einem Schlägel zu Felde.“ Jean Paul, Hesp. Zweites Heftlein, 16. Hundsposttag.

2) s. z. B. Jenkins in Educational Times Reprints Bd. 41, 1884, p. 94 oder Deutsche Schachzeitung XXIV, 1869, p. 142 („Der Schachautomat im Krystallpalaste zu Sydenham bei London“). Auch der berühmte von Kempelen'sche Automat führte Rösselsprünge aus (s. v. d. Linde, 1. c. Bd. II, p. 337—338).

falls „ungeschlossen“ oder „offen“. — Im folgenden wird es oft notwendig sein, für die 64 Felder des Schachbretts eine bequeme Notation zu besitzen. Eine solche lernten wir bereits in Kap. VII kennen; eine andere, zuerst von Vandermonde¹⁾ angewandte bezeichnet wie jene die Horizontalreihen von unten nach oben bezw. mit 1, 2, . . . 8, nun aber ebenso und zwar von links nach rechts die Vertikalreihen, so daß ein Feld mit a, b bezeichnet ist, wenn es der b -ten Horizontalen und der a -ten Vertikalen angehört.

Selbstverständlich läßt sich die Frage nach einem Rösselsprung nicht bloß für das gewöhnliche Schachbrett der 64 Felder stellen, sondern auch für andere quadratische, rechteckige oder sonstwie geformte Bretter, so daß wir im weiteren das Problem häufig allgemeiner, wenn auch stets unter vorwiegender Berücksichtigung des gewöhnlichen Schachbretts, auffassen werden.

§ 2. Eine Aufgabe Guarini's.

Bevor wir zu der Theorie des Rösselsprungs übergehen, wollen wir eine verwandte Aufgabe aus einem dem Anfang des XVI. Jahrh. angehörenden Manuskript Guarini's behandeln²⁾: *Auf den 4 Eckfeldern eines Brettes von 9 Feldern (s. Fig. 2) stehen 2 weiße und 2 schwarze Springer; man soll die weißen Springer auf die Felder der schwarzen bringen und umgekehrt.*

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Fig. 2.

Stehen die Springer gleicher Farbe auf benachbarten Eckfeldern, also etwa die weißen auf 1 und 3 und die schwarzen auf 7 und 9, so thue man folgende Züge:

1—8; 3—4; 9—2; 7—6; 4—9; 6—1; 2—7; 8—3.

1) „Remarques sur les problèmes de situation“. Histoire de l'acad. royale des sciences de Paris 1771, p. 567.

2) Nr. 42 des Manuskripts. Ich schöpfe hier aus Lucas, Récréat. t. IV, p. 207.

Jetzt befinden sich also die weißen Springer auf 3 und 9 und die schwarzen auf 1 und 7; der Effekt ist also derselbe, als wenn wir das Brett um 90° im Sinne des Uhrzeigers gedreht hätten. Da nun die gewünschte Stellung aus der ursprünglichen offenbar durch eine Drehung um 180° hervorgeht, so brauchen wir nur noch einmal dieselben Züge zu thun wie oben. Stehen die Springer derselben Farbe ursprünglich aber auf gegenüberliegenden Eckfeldern, so genügt bereits eine Drehung um 90° .

§ 3. Euler'sche Rösselsprünge.

Unter den von Euler angegebenen Rösselsprüngen befindet sich einer, welcher dadurch ausgezeichnet ist, daß in ihm der Springer erst alle Felder der einen Hälfte des durch die Mittellinie halbierten Schachbretts durchläuft und dann die der anderen, ein Rösselsprung, den wir fortan als einen „zweitiligen“ bezeichnen wollen.¹⁾ Fig. 3 giebt diesen Euler'schen Rösselsprung wieder²⁾, wobei die 64 Felder nach der Reihenfolge, in welcher sie vom Springer durchlaufen werden, durch Ziffern bezeichnet sind.

37	62	43	56	35	60	41	50
44	55	36	61	42	40	34	59
63	38	53	46	57	40	51	48
54	45	64	39	52	47	58	33
1	26	15	20	7	32	13	22
16	19	8	25	14	21	6	31
27	2	17	10	29	4	23	12
18	9	28	3	24	11	30	5

Fig. 3.

1) Rösselsprünge über das halbe Schachbrett finden sich schon sehr lange vor Euler, so z. B. in dem an erster Stelle unseres litterarischen Index angeführten Werke aus der ersten Hälfte des 16^{ten} Jahrhunderts, sowie bei Gianutio della Mantia 1597 (s. Index); von diesen beiden ist nur der des letzteren so beschaffen, daß sich ein Rösselsprung über die andere Hälfte des Schachbretts angliedern läßt (vgl. v. d. Lasa, Schachzeitung II, 1847, p. 317—320). Das frühzeitige Auftreten solcher Rösselsprünge hat seinen Grund darin, daß nach v. d. Linde l. c. I, p. 294 das Rösselsprungproblem überhaupt hervorgegangen ist aus der Aufgabe, alle auf der einen Hälfte des Schachbretts aufgestellten Figuren des Spiels mit einem der Springer der Reihe nach wegzuschlagen.

2) Euler, Histoire de l'acad. de Berlin 1759, p. 330.

Zudem ist dieser Rösselsprung „geschlossen“, d. h. ermöglicht einen Übergang von dem Schlusfeld zum Ausgangsfeld zurück, da 64 und 1 sich rösseln. Mit der Existenz eines geschlossenen Rösselsprungs ist zugleich der Nachweis erbracht, daß auch bei beliebigem Ausgangsfeld stets ein Rösselsprung existiert; um z. B. einen solchen mit 19 als Anfangsfeld zu erhalten, braucht man ja nur die Felder 19—64 in alter Weise zu durchlaufen, von 64 zu 1 zu gehen und dann die Felder 1—18 wieder in alter Weise zu passieren. Es ist damit sogar gezeigt¹⁾, daß es bei beliebigem Ausgangsfeld sogar mindestens 2 Rösselsprünge giebt, da ein geschlossener Rösselsprung natürlich eine Durchlaufung der Felder in zwiefacher Reihenfolge gestattet, nämlich neben der Durchlaufung im Sinne der Pfeilspitze (s. Fig. 4) auch die in umgekehrtem Sinne.

Euler hat ferner bemerkt, daß sich aus einem fertigen Rösselsprung eine Reihe anderer herleiten lassen; so können wir z. B. in dem oben angegebenen, da 64 und 55 sich rösseln, von 55 direkt zu 64 und von hier über 63, 62 etc. zu 56 springen, so daß dies letztere jetzt Schlusfeld wird. Soll z. B. das Eckfeld 50 Schlusfeld werden, so läßt sich ein solcher Rösselsprung aus dem zuletzt angegebenen leicht herleiten, da 49 sowohl das bisherige Schlusfeld 56, wie das verlangte 50 rösselt, wir also nur nach Durchlaufung von 1—49 zu 56, 57, ... 64 und von hier zu 55, 54, ... 50 zu gehen haben.

Auf dieses Prinzip gründet sich Euler's Methode²⁾, vollständige Rösselsprünge zu konstruieren. Er empfiehlt, die Felder zunächst so weit zu füllen, wie man bei willkürlichem Fortschreiten kommt. Dabei wird dann im allgemeinen eine Anzahl von Feldern unausgefüllt bleiben. Ist a z. B. ein

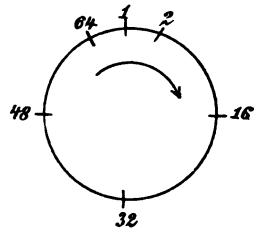


Fig. 4.

1) Euler, l. c. p. 313.

2) l. c. p. 317 ff.

solches Feld, so formt Euler den unvollkommenen Rösselsprung in der oben auseinandergesetzten Weise so um, daß ein solches Feld Schlusfeld wird, welches a rösselt, schließt dann an dieses das Feld a an und fährt nun in dieser Weise fort, bis alle Felder besetzt sind. Daß es unter den unausgefüllten Feldern stets ein solches a , das sich mit einem bereits ausgefüllten rösselt, geben muß, ist ohne weiteres ersichtlich. Denn andernfalls müßten sich die Brettfelder in 2 resp. mehrere Klassen teilen derart, daß ein Springerzug immer nur zu Feldern derselben Klasse führte, eine Konsequenz, deren Unmöglichkeit bereits durch die Angabe eines Rösselsprungs (Fig. 3) erwiesen ist.

Von einer systematischen Methode ist dieses Verfahren Euler's natürlich noch weit entfernt; wir haben uns daher darauf beschränkt, dasselbe nur kurz zu skizzieren, wenn es auch für die weitere Entwicklung der Theorie von fundamentaler Bedeutung war.¹⁾ An demselben Mangel leidet das praktisch zwar brauchbarere Verfahren von Warnsdorf, das wir daher jetzt gleich ungeachtet der chronologischen Reihenfolge hier anschließen.

§ 4. Das Warnsdorf'sche Verfahren.

Dieses Verfahren besteht in der Beobachtung folgender 2 Regeln²⁾: 1. *Bei jedem Zug setzt man den Springer auf das Feld, von welchem unter den zur Wahl stehenden am wenigsten Springerzüge nach anderen, noch unbesetzten Feldern möglich sind*; denn die Wahrscheinlichkeit, ein Feld nochmals zu erreichen, ist um so größer, je größer die Zahl seiner Ausgänge

1) Reproduktionen der Euler'schen Untersuchungen finden sich — außer in den Sammelwerken — bei Legendre, *Théorie des nombres*, t. II, 2^{te} Ausg. p. 151 od. 3^{te} Ausg. p. 187; Deutsche Übers. v. Maser Bd. II, 1893, p. 146—160; ferner in dem *Journal of science and the arts*, III, 1817, p. 72—77, sowie bei Frost „A simple method of tracing paths of knight“ *Quart. J. of Math.* XIV, 1877, p. 354—359 etc.

2) H. C. von Warnsdorf, „Des Rösselsprungs einfachste und allgemeinste Lösung“. Schmalkalden 1823.

ist. 2. *Ergeben sich so mehrere Felder mit gleichen Minimalzahlen, so ist die Wahl beliebig.*

Soll der Rösselsprung geschlossen sein oder ist das Schlusfeld vorgeschrieben, so erfordern die Regeln noch folgende Zusätze¹⁾: Ein etwa vorgeschriebenes Schlusfeld erhält sofort die Bezeichnung 64 und gilt als besetzt. Befindet sich unter mehreren gleicherweise zur Wahl stehenden Feldern eins, welches sich mit 64 rösselt oder welches — bei Forderung eines geschlossenen Rösselsprungs — das Feld 1 rösselt, so bleibt es noch reserviert, und ein anderes wird zunächst besetzt. Wird 64 (resp. 1 bei Forderung eines geschlossenen Diagramms) nur noch von einem Feld gerösselt, so schreibt man in dieses 63 (resp. 64) etc., mit anderen Worten: man konstruiert den Rösselsprung gewissermaßen von beiden Enden aus. Wenzelides²⁾ rät ferner, vorsichtshalber die von den Eckfeldern ausgehenden je 2 Züge sofort zu ziehen, um nicht von den Eckfeldern ausgeschlossen zu werden. Die Beobachtung dieser Regeln führt im allgemeinen jedenfalls zu einem Rösselsprung; Lucas³⁾ meint sogar, daß dies Verfahren sich noch nach 40 beliebig, ganz gegen die Regeln ausgeführten Zügen zur Vervollständigung des Rösselsprungs eignet, jedenfalls ein Beweis für die große Zahl aller Lösungen überhaupt.

Nach anderen soll die Richtigkeit der zweiten Warnsdorf'schen Regel durch Untersuchungen von Jaenisch zweifelhaft geworden sein⁴⁾; Wenzelides erprobte die Regel, indem er von vornherein gewisse Partien des Diagramms festlegte und nun nach den Warnsdorf'schen Regeln die Vervollständigung versuchte, fand hier jedoch Fälle, in denen die Regeln

1) von Warnsdorf, Zur Theorie des Rösselsprungs. Schachzeitung XIII, 1858, p. 489—492. Vgl. auch v. d. Lasa, Lösung des Rösselsprungs. Schachzeit. I, 1846, p. 188—191.

2) Schachzeitung IV, 1849, p. 48.

3) L'arithm. amus. p. 242.

4) „Traité des applications de l'analyse mathém. au jeu des échecs.“ Petersburg 1862. Ich schöpfe aus Lucas, L'arithm. amus., da jenes äußerst seltene Werk von Jaenisch mir nicht zugänglich war.

versagten, z. B. einmal bei 4 zu Anfang festgelegten Ketten von je 5 Zügen.¹⁾

Mit Rücksicht auf vollkommeneren neuere Methoden glauben wir hier auf Beispiele für dies Verfahren verzichten zu sollen (s. jedoch Anm. 1, S. 173 und Anm. 1, S. 175).

§ 5. Rösselsprünge auf Brettern anderer Form.

Nicht nur für das gewöhnliche Schachbrett der 64 Felder, sondern auch für anders geformte Bretter hat Euler das Rösselsprungproblem ins Auge gefasst. Was zunächst die quadratischen Bretter anlangt, so ergibt sich für 4 und 9 Felder sofort die Unmöglichkeit eines Rösselsprungs: im ersteren Falle rösselt kein Feld ein anderes und im zweiten gilt dies für das Mittelfeld.

Aber auch für ein quadratisches Brett von 16 Feldern ist ein Rösselsprung nicht möglich²⁾, wie man leicht folgen-

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

Fig. 5.

dermaßen erkennt: Unter den 4 Eckfeldern müssen mindestens 2 sein, welche keine Endfelder wären, wenn es einen Rösselsprung gäbe. Wir dürfen also ohne Beschränkung annehmen, daß 1 (s. Fig. 5) weder Anfangs- noch Schlusfeld ist. Nun rösselt aber 1 nur die Felder 7 und 10; es müßte also in unserem Rösselsprung der Passus .. 7—1—10 .. resp. .. 10—1—7 .. vorkommen. Die Felder 10 und 7 sind zugleich die einzigen, welche 16 rösseln; es müßte sich also 16 an 10 oder 7 auf der einen oder anderen Seite anschließen und, da dann kein Feld sich mehr an 16 angliedern kann, müßte dieses notwendig Endfeld sein, also etwa der Passus 16—7—1—10 .. vorkommen. Entsprechend erkennt man, daß auch die 4 Felder 6, 13, 11, 4 aufeinander folgen und das andere Ende des Rösselsprungs bilden müssen.

1) Schachz. IV, 1849, p. 54; vgl. auch v. dems. Schachz. V, 1850, p. 212.

2) Euler, l. c. p. 332.

Dann ist aber ein Übergang zwischen diesen beiden Enden ausgeschlossen, weil die übrigen 8 Felder in zwei Klassen 2, 8, 15, 9 und 3; 12, 14, 5 zerfallen derart, daß kein Feld der einen eins der anderen rösselt.

Für ein Quadrat von 25 Feldern giebt es dagegen Rösselsprünge, wie Fig. 6 zeigt.¹⁾ Da jedes der 4 Eckfelder nur je 2 der 4 um das Mittelfeld herumliegenden Felder 2, 4, 22, 24 rösselt, so muß eins der 4 Eckfelder notwendig Endfeld sein, also der Rösselsprung in einer der 4 Ecken beginnen oder endigen. Zugleich erkennt man daraus, daß geschlossene Rösselsprünge hier unmöglich sind.

Dies letztere ergibt sich auch aus einem allgemeineren Gesichtspunkte, insofern als für Bretter ungerader Felderzahl geschlossene Rösselsprünge überhaupt nicht existieren. Erinnern wir uns nämlich der in § 1 angegebenen Vandermonde'schen Notation für die Felder des Schachbretts und bedenken wir, daß mit jedem Zuge die eine der beiden Koordinaten a , b sich um 2, die andere um 1 ändert, so sehen wir, daß, wenn für ein bestimmtes Feld die Summe der Koordinaten ($a + b$) eine gerade Zahl ist, sie für alle dies Feld rösselnden Felder eine ungerade Zahl ist und vice versa. Nennen wir nun kurz die Felder, für welche die Summe $a + b$ gerade ist, „gerade“ Felder und die anderen „ungerade“, so sieht man, daß ein Springerzug stets von einem geraden zu einem un-

23	18	5	10	25
6	11	24	19	14
17	22	13	4	9
22	7	2	15	20
1	16	21	8	3

Fig. 6.

1) Euler l. c. p. 334. Dieser Euler'sche Rösselsprung weist die Besonderheit auf, daß bei ihm die Nummern von je 2 gegenüberliegenden Feldern sich gerade zu 26 ergänzen. — In dem oben citierten Werke von Jaenisch soll auf ein Brett von 25 Feldern die Warnsdorfsche Methode angewandt sein. Der obige Rösselsprung der Fig. 6 entspricht — bei vorgeschriebenen Endfeldern in gegenüberliegenden Ecken — den Warnsdorfschen Regeln nicht, so müßte nach diesen z. B. auf 4 das Feld 11 folgen.

geraden oder bei einem in 2 Farben ausgeführten Brett, wie schon in § 1 gesagt: von einem weißen zu einem schwarzen Felde führt resp. umgekehrt, dafs also für den Übergang von einem geraden zu einem geraden, sowie von einem ungeraden zu einem ungeraden Felde stets eine gerade Anzahl von Springerzügen erforderlich ist, insbesondere also auch, um von einem Felde zu diesem wieder zurückzukommen. Eine geschlossene Kette von Springerzügen mufs also stets eine gerade Anzahl von Zügen umfassen, so dafs ein geschlossener Rösselsprung auf Brettern von ungerader Felderzahl niemals existieren kann¹⁾, auf solchen von gerader Seitenzahl natürlich aber auch nicht zu existieren braucht.²⁾ — Da von 2 Nachbarfeldern derselben Horizontalen oder Vertikalen stets das eine gerade, das andere ungerade ist, so erfordert der Übergang von dem einen zum anderen stets eine ungerade Anzahl von Zügen; hieran liegt es, dafs in den Lösungen (s. Fig. 3 und 6) stets gerade und ungerade Nummern in den Horizontal- und Vertikalreihen abwechseln.

Für quadratische Bretter von 36, 49, 81 etc. Feldern giebt es Rösselsprünge, worauf wir jedoch hier nicht weiter eingehen.³⁾

1) Einen anderen Beweis hierfür — unter Benutzung der Wessel-Gauss-Argand'schen Darstellung der imaginären Zahlen giebt Fritz Hoffmann, „Sur la marche du cavalier“ *Nouv. annal. de mathém.* V, 1886, p. 224—226 (wegen dieser schon von Gauss angewandten Notation der Schachbrettfelder s. dessen Briefw. mit Schumacher Bd. VI, p. 121, Brief vom 27. IX. 1850, sowie Kap. IX Anm. 3, S. 121 unseres Buches).

2) Beispiele hierfür s. auf der nächsten Seite; Euler sagt (l. c. p. 336), dafs auf einem rechteckigem Brette von gerader Felderzahl stets geschlossene Rösselsprünge existieren, wofern die Felderzahl des Brettes sowohl in der Länge wie in der Breite mindestens 5 beträgt.

3) Z. B. bei Jenkins, *Educ. Times Repr.*, Question 7623, Bd. 41, 1884, p. 93—96 findet man Rösselsprünge für 36, 49, 81 Felder; s. auch an demselben Orte p. 96—98 die Arbeit von Biddle, wo für das Brett von 49 Feldern für 25 verschiedene Anfangsfelder die Möglichkeit eines Rösselsprungs nachgewiesen ist. Vgl. außerdem die weiter unten (§ 7 und 10) zu besprechenden Arbeiten von Moon, Delanny und Frost.

Auch rechteckige und anders geformte Bretter zieht Euler in den Kreis seiner Betrachtungen; so konstatiert er für rechteckige Bretter von 3×5 oder 3×6 Feldern die Unmöglichkeit eines Rösselsprungs, für solche von 3×4 , 3×7 (resp. $3 \times n$, wo $n \geq 7$ ist), 4×5 , 4×6 , 4×7 die Existenz ungeschlossener und die Unmöglichkeit geschlossener Rösselsprünge und für 5×6 die Existenz geschlossener Rösselsprünge.¹⁾

Zum Schluss mögen noch 2 geschlossene Rösselsprünge Euler's für andere Brettformen hier Platz finden²⁾:

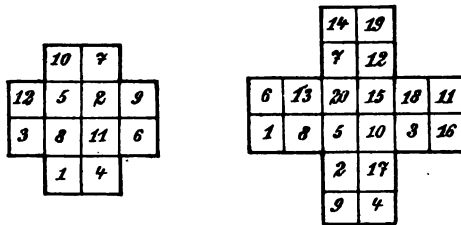


Fig. 7.

§ 6. Methoden von Volpicelli und Minding.

Wenn wir das Verfahren Euler's mehr als ein systematisches Probieren denn als eine Methode ansprechen mußten, so wird man das jetzt zu besprechende Verfahren auch nur so bezeichnen können, jedenfalls aber nicht, wie Volpicelli, der Begründer desselben, es that³⁾, eine „vollständige Lösung“

1) l. c. p. 336; vgl. auch unsere Anm. 1, S. 193. — Auf ein Brett von 3×4 Feldern scheint in dem mehrfach erwähnten Werke von Jaenisch die Warnsdorfsche Methode angewandt zu sein. Dieselbe liefert in diesem Falle alle überhaupt möglichen Rösselsprünge, nämlich die im nächsten § (S. 177) angegebenen 4, sowie B unserer Fig. 20 und ein Spiegelbild des letzteren.

2) l. c. p. 337.

3) Gegen Volpicelli's Bezeichnung seines Verfahrens als einer „So-

des Problems darin sehen. Eine Besonderheit dieses — übrigens eigentlich von selbst gegebenen — Verfahrens besteht darin, daß es ein rein algebraisches Gewand angenommen hat und daher ohne Benutzung des Brettes angewandt werden kann.

Legen wir Vandermonde's Notation zu grunde (s. § 1), so ergeben sich die Felder x, y , zu denen wir von dem gegebenen Feld x_1, y_1 gelangen können, offenbar, indem man den Wert von x um 1, den von y um 2 ändert resp. umgekehrt, wobei diese Änderungen sowohl Vergrößerungen wie Verkleinerungen sein dürfen, so daß im ganzen, entsprechend den 8 mit einem gegebenen Feld im allgemeinen sich rösselnden Feldern (s. Fig. 1, § 1), 8 Möglichkeiten vorhanden sind. Volpicelli¹⁾ sucht nun für alle möglichen Werte von x_1, y_1 diese 8 Wertsysteme auf, merzt dabei natürlich diejenigen Lösungen, welche, wie z. B. bei negativen Werten, nicht mehr wirkliche Felder des Brettes repräsentieren, aus und stellt die übrigen tabellarisch zusammen, mit anderen Worten: er stellt in einer Tabelle zusammen, mit welchen anderen sich die einzelnen Felder rösseln. So erhält er z. B. für ein Brett von 3×4 Feldern (4 Zeilen und 3 Kolonnen) folgende Tabelle²⁾, in der zu jedem x_1, y_1 in derselben Horizontalen die verschiedenen zugehörigen x, y angegeben sind:

lution complète“ (s. im litterar. Index die Titel seiner Arbeiten aus dem Jahre 1872) wendet sich A. Régnier, *Les Mondes* XXXII, 1873; vgl. auch Volpicelli's Antwort ebenda XXXIII, 1874.

1) Volpicelli, „Solution d'un problème de situation relatif au cavalier des échecs“. *Comptes rendus de Paris* XXXI, 1850, p. 314—318.

2) Die entsprechende Tabelle für das gewöhnliche Schachbrett, aber natürlich ohne die ungeheure Zahl aller daraus resultierenden Rösselsprünge hat Volpicelli, *Comptes rendus de Paris* t. 74, 1872 gegeben; eine Reproduktion der Volpicelli'schen Methode findet man bei Tarry, „Solution du problème du cavalier au jeu d'échecs“. *Les Mondes* XXVIII, 1872, p. 60—64.

x_1, y_1	x, y	x, y	x, y
1, 1	2, 3	3, 2	—
1, 2	2, 4	3, 3	3, 1
1, 3	2, 1	3, 4	3, 2
1, 4	2, 2	3, 3	—
2, 1	3, 3	1, 3	—
2, 2	3, 4	1, 4	—
2, 3	3, 1	1, 1	—
2, 4	3, 2	1, 2	—
3, 1	2, 3	1, 2	—
3, 2	2, 4	1, 3	1, 1
3, 3	2, 1	1, 4	1, 2
3, 4	2, 2	1, 3	—

Hieraus findet man dann, wenigstens in einem so einfachen Fall wie dem vorliegenden, leicht, jedoch keineswegs schneller als durch Betrachtung der Figur, die verschiedenen Lösungen des Rösselsprungs, deren es hier mit dem Anfangsfeld 2, 4 z. B. folgende vier gibt:

- I. 2, 4; 1, 2; 3, 1; 2, 3; 1, 1; 3, 2; 1, 3; 3, 4; 2, 2; 1, 4; 3, 3; 2, 1
- II. 2, 4; 1, 2; 3, 1; 2, 3; 1, 1; 3, 2; 1, 3; 2, 1; 3, 3; 1, 4; 2, 2; 3, 4
- III. 2, 4; 3, 2; 1, 1; 2, 3; 3, 1; 1, 2; 3, 3; 1, 4; 2, 2; 3, 4; 1, 3; 2, 1
- IV. 2, 4; 3, 2; 1, 1; 2, 3; 3, 1; 1, 2; 3, 3; 2, 1; 1, 3; 3, 4; 2, 2; 1, 4.

Von diesen Rösselsprüngen werden wir II. in *A* der Fig. 20 wiederfinden¹⁾; übrigens sind III. und IV. nur die Spiegelbilder von I. bzw. II.

Die Auffindung der zu einem gegebenen Wertepaar x_1, y_1 zugehörigen x, y kam auf die Auflösung der Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} x - x_1 &= \pm 2 & \text{und} & & x - x_1 &= \pm 1 \\ y - y_1 &= \pm 1 & & & y - y_1 &= \pm 2 \end{aligned}$$

mit allen nur möglichen Vorzeichenkombinationen hinaus; dieselben bilden in dieser Form oder zusammengefaßt zu

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = 5$$

die „Gleichung“ des Springers (vgl. Kap. VII, S. 82).

1) Man vgl. übrigens S. 175, Anm. 1. — III. ist der erste der von Euler l. c. p. 336 angegebenen Rösselsprünge, wegen II. bzw. IV. s. S. 193, Anm. 1.

Der berühmte Mathematiker Minding¹⁾ ersetzt nun die Auflösung dieser Gleichungen durch einen anderen Algorithmus; er bezeichnet das Vandermonde'sche Feld a, b durch $x^a y^b$ und findet alle dies Feld rösselnden Felder als Terme des Ausdrucks $U \cdot x^a y^b$, wo

$$U = \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(y + \frac{1}{y}\right)$$

ist und wo die durch die Natur der Sache unmöglichen Terme, wie z. B. die mit negativen oder verschwindenden Exponenten, auszumerzen sind. Um dies Verfahren näher auseinanderzusetzen, reproduzieren wir folgende von Minding²⁾ behandelte Aufgabe:

„Auf wieviel Arten ist es möglich, auf einem Rechtecke von dreimal vier Feldern in 11 Sprüngen aus dem Eckfeld 1, 1 auf das ihm schräg gegenüberstehende Eckfeld 3, 4 zu gelangen, wenn das Ausgangsfeld 1, 1 gar nicht mehr und das Eckfeld 3, 4 nur erst mit dem 11^{ten} Sprunge besetzt werden darf?“

Das Ausgangsfeld ist hier xy ; setzen wir $Uxy = U_1$, $U Uxy = U_2$, allgemein $U_n xy = U_{n+1}$, so ist

$$U_1 = x^2 y^3 + x^3 y^2$$

$$U_2 = x^3 y + xy^3 + x^2 y^4$$

$$U_3 = x^2 y + 2xy^2 + 2x^3 y^2 + x^2 y^3$$

$$U_4 = 3x^3 y + 3xy^3 + 3x^3 y^3 + 4x^2 y^4$$

$$U_5 = 6x^2 y + 10xy^2 + 7x^3 y^2 + 3x^2 y^3 + 3xy^4$$

$$U_6 = 13x^3 y + 3x^2 y^2 + 13xy^3 + 19x^3 y^3 + 17x^2 y^4.$$

Anstatt nun weiter U_7 , etc. zu bilden, fangen wir besser an dem anderen Ende an und denken uns, wir gingen von 3, 4 aus, und gebrauchen hier statt der U die Symbole V ; wir erhalten so:

$$V_1 = x^2 y^2 + xy^3.$$

Da U_1 durch die Substitution von $x^{4-\alpha}$ für x^α und von $y^{5-\beta}$ für y^β in V_1 übergeht und offenbar wegen der völlig äquivalenten Lage der beiden Endfelder einem in dem einen Falle brauchbaren Felde auch stets in dem anderen ein solches entspricht, so können wir durch die gleiche Substitution V_5 aus U_5 herleiten und erhalten:

$$V_5 = 3x^3 y + 3x^2 y^2 + 7xy^3 + 10x^3 y^3 + 6x^2 y^4.$$

1) „Über den Umlauf des Springers auf dem Schachbrette (den sogenannten Rösselsprung)“. Crelle's Journal Bd. 44, 1852, p. 73—82; abgedr. a. d. Bulletin de la classe phys. math. de l'Académie des sciences de St. Pétersbourg tome VI; in engl. Übers. („On the Knight's move at chess“) erschienen in Cambr. and Dubl. Math. Journ. VII, 1852, p. 147—156.

2) l. c. p. 76.

In 6 Sprüngen kommt man also auf 13 Arten von 1, 1 zu 3, 1 und in 5 Sprüngen auf 3 Arten von 3, 1 zu 3, 4, also auf $13 \cdot 3 = 39$ Arten in 11 Sprüngen von 1, 1 zu 3, 4, wenn das 6^{te} Feld gerade 3, 1 ist; im ganzen kommt man so in 11 Sprüngen von 1, 1 zu 3, 4 auf

$$13 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 13 \cdot 7 + 19 \cdot 10 + 17 \cdot 6 = 431 \text{ Arten.}$$

Dabei brauchen aber die in den 11 Sprüngen berührten Felder natürlich nicht alle verschieden zu sein; wir hätten sonst in dem obigen Algorithmus ein bereits in U_i vorgekommenes Feld in den U mit höherem Index unterdrücken müssen, wie dies bezüglich des Anfangsfeldes und mutatis mutandis des Schlusfeldes dem Wortlaut der Aufgabe gemäß auch geschehen ist. Unter den 431 Ketten befinden sich aber natürlich alle vollständigen Rösselsprünge, welche mit diesen beiden Endfeldern möglich sind. Wie man sich leicht überzeugt, giebt es jedoch nur einen solchen: es ist derjenige, der uns in B der Fig. 20 wieder begegnen wird. — Ein diesem Minding'schen ähnliches Abzählverfahren, herrührend von Herrn Flye St.-Marie, werden wir in § 13 kennen lernen.

§ 7. Methode Collini's.

Bei Euler und schon vorher begegnet uns, wie oben (§ 3) erwähnt, eine Einteilung des Schachbretts in 2 Teile, so zwar, daß diese Teilung durch eine Mittellinie geschieht, also 2 kongruente Hälften entstehen. Auf eine andere Art, nämlich in ein inneres Quadrat von 16 und einen Rand von 48 Feldern, zerlegte Collini¹⁾, Direktor des naturhist. Kabinetts zu Mannheim und zuvor Geheimsekretär Voltaire's, das Schachbrett behufs Bildung von Rösselsprüngen und teilte weiter die Felder jedes der 2 Teile in 4 Klassen, so zwar, daß sich die Felder derselben Klasse stets mit dem Springer hintereinander durchlaufen lassen. In Fig. 8 ist diese Einteilung veranschaulicht, indem die Felder derselben Klasse durch denselben Buchstaben bezeichnet und für einige Klassen die betreffenden Ketten von Springerzügen angegeben sind. Wir haben so 8 Ketten von Springerzügen, 4 innere von je 4 Fel-

1) „Solution du problème du cavalier au jeu d'échecs“ Mannheim 1773. — Vgl. hierzu auch eine Arbeit von der Lasa's, Schachz. II, 1847, p. 97—103.

dern (wir nennen sie kurz: a', b', c', d') und 4 äußere (a, b, c, d) von je 12 Feldern.

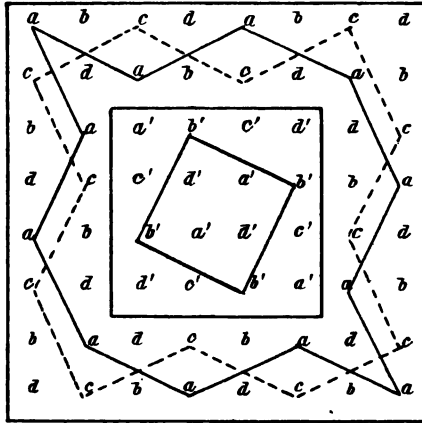


Fig. 8.

Collini's Methode besteht nun darin, die 8 Ketten aneinanderzureihen in der Weise, daß immer eine innere Kette

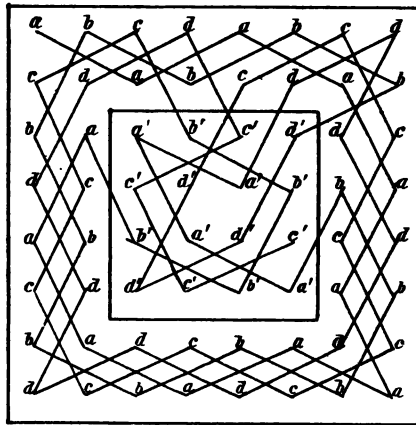


Fig. 9.

mit einer äußeren abwechselt, wobei alle Folgen zulässig sind außer denen von gleichen Buchstaben, also außer aa', bb' ,

cc' , dd' , zwischen welchen Ketten eben ein Übergang nicht möglich ist. So erhält man z. B. einen brauchbaren Rösselsprung aus dem Schema $ab'cd'ba'dc'$, nämlich den in Fig. 9 angegebenen.

Eine Ausdehnung dieser Methode auf andere quadratische Bretter findet man bei Moon¹⁾ welcher übrigens von der Arbeit Collini's keine Kenntnis gehabt zu haben scheint. Ein Brett von 12^2 Feldern teilt Moon in 3 Gebiete, von denen die beiden inneren gerade die obigen Teile des gewöhnlichen Schachbretts sind, umgeben jetzt noch von einem äußeren Randgebiet von 80 Feldern. Die Felder jedes dieser 3 Gebiete, welche wir hier als das „innere“, „mittlere“ und „äußere“ unterscheiden wollen, lassen sich wieder zu je 4 Ketten von Zügen zusammenfassen. Die Aneinanderreihung dieser Ketten zu einem Rösselsprung geschieht dann in der Weise, daß man zunächst etwa eine Kette des äußeren, dann eine des mittleren und darauf zwei des inneren, eine des mittleren, zwei des äußeren, eine des mittleren, zwei des inneren, eine des mittleren und schließlich die letzte des äußeren Gebietes nimmt. Die Ketten des mittleren Gebietes als des ständigen Durchgangsgebietes zwischen dem inneren und äußeren würden vor den anderen verbraucht sein, würde man von den letzteren nicht — außer an den Enden des Rösselsprungs — stets je zwei Ketten zusammennehmen; solche Verbindungen von 2 Ketten desselben Gebiets sind ja auch sehr wohl möglich, z. B. zwischen den Feldern $c1$ und $b3$ (in der Notation von Kap. VII, Fig. 1); ausgeschlossen sind nur die Verbindungen $a'd'$ und $b'c'$ im inneren Gebiet und die entsprechenden im äußeren Gebiet (vgl. Fig. 8).

Dieselbe Methode ist, wie man ohne Schwierigkeit erkennt, stets anwendbar, wenn n , die Anzahl der Felder einer Reihe, durch 4 teilbar ist.

Für $n = 6$ teilt Moon das Brett in 2 Teile, von denen

1) „On the knights move at chess“. Cambridge Math. J. III, 1843, p. 233—236.

der eine die 4 inneren Felder, der andere den Rest umfaßt; die Felder des äußeren Randgebiets werden wieder zu 4 Ketten vereinigt, und es entsteht ein Rösselsprung, indem man an eine dieser 4 Ketten immer eins der 4 inneren Felder anschließt. Auch diese Methode besitzt allgemeineren Wert, nämlich für alle Fälle, in denen n , durch 4 geteilt, den Rest 2 giebt. Um diese Verallgemeinerung nach denselben Principien wie oben durchführen zu können, betrachten wir als inneres Gebiet allerdings am besten nicht das Quadrat der 4 Felder, zwischen denen Springerzüge ja nicht möglich sind, sondern das Quadrat der 36 Felder, welches sich in 4 ungeschlossene Ketten, jede bestehend aus je einem inneren und 8 Randfeldern, zerlegen läßt. Zwischen diesen Ketten sind dann Übergänge möglich, und die weiteren Ränder schließen sich hieran an wie oben.

Der Fall eines ungeraden n , für welchen Moon seine Methode nur kurz skizziert, ist von Herrn Delannoy eingehend studiert worden.¹⁾ Für $n = 5$ teilt

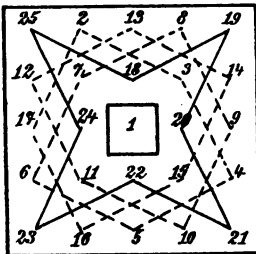


Fig. 10.

man das Brett in zwei Teile, das Mittelfeld und den Rand. Letzterer läßt sich in 2 Ketten durchlaufen, welche in Fig. 10 durch die punktierten und ausgezogenen Linien unterschieden sind. Von der punktierten Kette ist ein Übergang sowohl zu dem Mittelfeld wie zu der ausgezogenen Kette möglich, und wir erhalten daher einen

Rösselsprung, wenn wir, etwa von dem Mittelfeld ausgehend, zu dem durch 2 (in Fig. 10) bezeichneten Felde springen, darauf alle Felder der punktierten Kette durchlaufen, von dem letzten (17) zu dem Feld 18 der ausgezogenen Kette springen und dann diese durchlaufen, um in der Ecke oben links zu

1) s. Frolow, Les carrés magiques. Paris 1886 oder Lucas, L'arithm. amus. p. 254 ff. Für $n = 7$ und 9 findet man übrigens Rösselsprünge nach Collini'scher Methode vorher bei Biddle, Educat. Times Repr. 1884, Bd. 41, p. 96—98.

endigen. — Umgeben wir nun die obige Figur wieder mit einem Rand von der Breite zweier Felder, also gehen wir zu $n = 9$ über, so können wir dieses Randgebiet wieder in 2 Ketten, eine punktierte und eine ausgezogene, zerlegen (s. Fig. 11). Wir durchlaufen, um einen Rösselsprung zu erhalten, die inneren 25 Felder wie zuvor, gehen von dem Schlüsselfeld in der Ecke oben links zu dem Feld 26 der punktierten Kette des äußeren Gebiets über, durchlaufen diese Kette bis 65 und gehen von hier zu dem Feld 66 der ausgezogenen

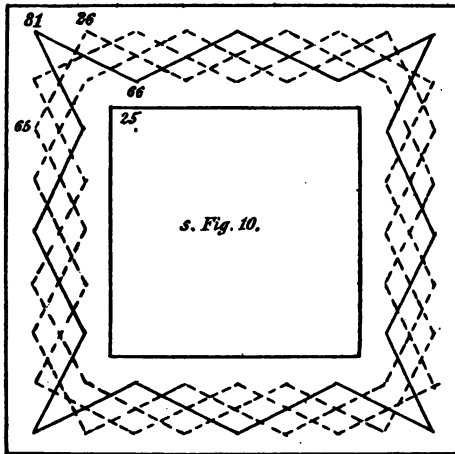


Fig. 11.

Kette über, deren Felder dann durchlaufen werden. Wir endigen dabei wieder in der Ecke oben links, so daß wir von hier aus wieder auf ein neues Randgebiet übergehen können und unsere Methode daher als eine allgemeine für den Fall, daß n , durch 4 geteilt, den Rest 1 giebt, betrachten dürfen.

Für $n = 7$ verbinden wir wieder die Felder des äußeren Randes zu 2 Ketten, einer punktierten und einer ausgezogenen (s. Fig. 12), welche sich jetzt jedoch nicht aneinanderreihen lassen. Von den inneren 9 Feldern lassen wir das Mittelfeld isoliert und verbinden die anderen 8 zu einer ungeschlossenen Kette; ein Rösselsprung ergibt sich leicht, indem wir von

dem Eckfeld 1 über 2 zum Mittelfeld 3 springen, von da zu 4 und dann die punktierte Kette durchlaufen bis 33, von hier zu 34 auf das innere Quadrat und über die Felder dieses zu 41, von da auf die ausgezogene Kette des äußeren Gebiets zu 42 springen und dann schließlich diese durchlaufen bis 49.

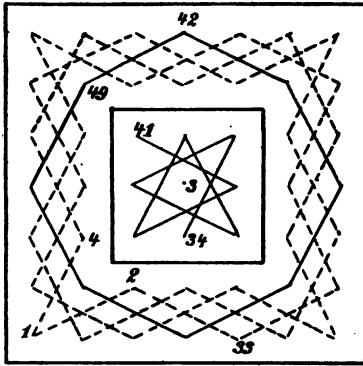


Fig. 12.

Umgeben wir diese Figur wieder mit einem Rand (s. Fig. 13), so lassen sich die Felder desselben wieder zu 2 Ketten vereinigen, welche mit dem Rösselsprung der 49 Felder so verknüpft werden

können, daß die eine der neuen Ketten, die ausgezogene, bei 1 beginnend und bei 16 endigend, zuerst durchlaufen wird, danach zu dem Feld (1) gesprungen und nun der Rössel-

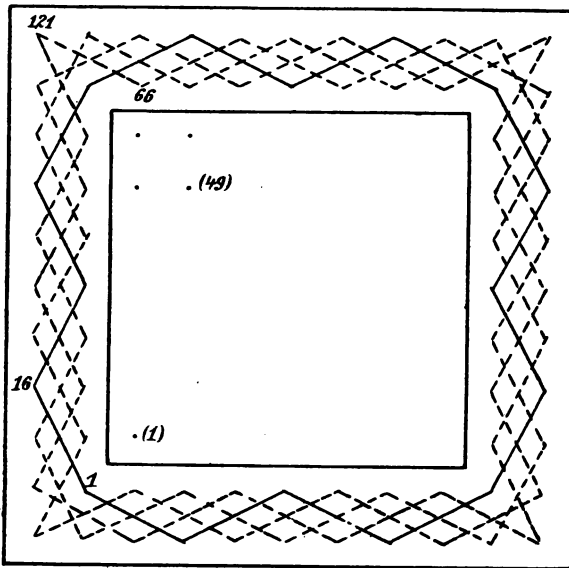


Fig. 13.

sprung der 49 Felder wie in Fig. 12 durchlaufen wird, so- dann an das Schlusfeld (49) des letzteren das Feld 66 angeknüpft und von da aus die punktierte Kette bis schliesslich zu 121 durchlaufen wird. Die Endfelder dieses Rösselsprungs haben wieder — wenn auch mit Vertauschung von Anfang und Ende — entsprechende Lage wie zuvor, und unsere Methode gilt daher offenbar allgemein für alle Fälle, in denen n , geteilt durch 4, den Rest 3 läßt.

Damit ist aber die Collini'sche Methode allgemein durch- geführt, indem wir Lösungen gegeben haben für die Fälle, in denen $n \geq 5$ bei Division durch 4 die Reste 0, 1, 2, 3 läßt, d. h. für alle Werte von $n \geq 5$.

§ 8. Methode Vandermonde's.

Für ein Brett von 100 Feldern konstruierte Euler einen Rösselsprung¹⁾, indem er 4 Rösselsprünge von je 25 Feldern

1	2	3	4	13	9	5	1
5	6	7	8	14	10	6	2
9	10	11	12	15	11	7	3
13	14	15	16	16	12	8	4
4	8	12	16	16	15	14	13
3	7	11	15	12	11	10	9
2	6	10	14	8	7	6	5
1	5	9	13	4	3	2	1

Fig. 14.

aneinanderreichte. Auf das gewöhnliche Schachbrett ist dies Princip natürlich nicht anwendbar, da für ein Brett von 16 Feldern bekanntlich kein Rösselsprung existiert (s. S. 172). Immerhin erwies sich auch hier eine Viertelung des Bretts,

1) l. c. p. 335.

wie ja aus Gründen der Symmetrie zu erwarten stand, als ein sehr fruchtbares Princip. Der erste, welcher hiervon Gebrauch machte, war der Pariser Akademiker Vandermonde¹⁾, dessen Methode wir im folgenden zunächst besprechen. Denken wir uns das gewöhnliche Schachbrett in 4 Quadranten geteilt und die 16 Felder in jedem der 4 so mit den Ziffern 1—16 bezeichnet, daß die bei Drehungen des Bretts um 90° coincidierenden Felder gleiche Bezeichnungen tragen (s. Fig. 14), so wollen wir zunächst in einer Ecke anfangen und nun in 16 Sprüngen zu der gegenüberliegenden Ecke gehen, so zwar, daß die in diesen Sprüngen berührten Felder alle von ver-

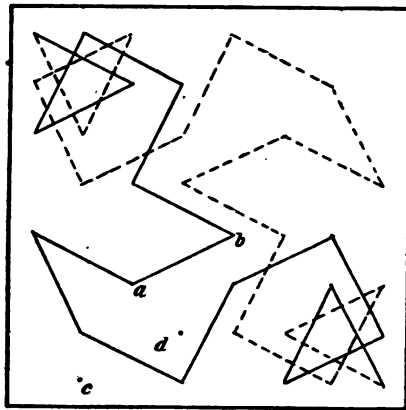


Fig. 15.

schiedener Ziffer sind. Eine solche Kette ist z. B. die in Fig. 15 in ausgezogenen Linien angegebene, deren Felder die Ziffern 1, 7, 9, 2, 8, 15, 16, 11, 4, 6, 13, 12, 14, 5, 3, 10, 1 tragen. Da jede Ziffer in dieser Kette nur einmal vorkommt, also diejenigen Felder, in welche die bisher passierten bei Drehungen übergehen, noch unausgefüllt sind, so erhält man durch Drehung des Bretts um 180° aus dieser Kette eine neue von 16 noch unausgefüllten Feldern (siehe

1) „Remarques sur les problèmes de situation.“ Hist. de l'académie royale des sciences de Paris 1771, p. 566—574.

in Fig. 15 die punktierten Linien), welche mit der ersten die Endfelder gemein hat, also mit ihr zusammen eine geschlossene Kette von 32 Feldern bildet. Es sind so zweimal 16 Felder ausgefüllt, von denen die einen 16 bei Drehungen um 180° die Plätze der anderen einnehmen, während dagegen die 32 Felder, auf deren Plätze sie bei Drehung um 90° kommen würden, gerade die noch freien sind. Wir erhalten also durch Drehung um 90° noch eine zweite geschlossene Kette¹⁾ aus den noch unausgefüllten 32 Feldern, und es handelt sich jetzt nur noch darum, diese beiden Ketten zu einer zu vereinigen. Dies geschieht nun leicht nach folgendem Princip: Veranschaulichen wir uns die beiden geschlossenen Ketten von je 32 Feldern durch 2 Kreise mit je 32 Punkten auf der Peripherie (s. Fig. 16), so suchen wir 2 benachbarte

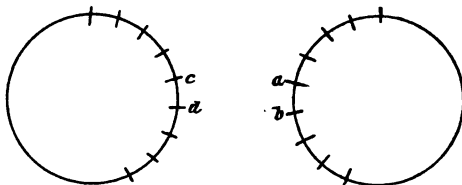


Fig. 16.

Punkte a, b des einen und 2 benachbarte c, d des anderen so, daß ein Übergang von a zu c und von d zu b möglich ist, d. h. im Sinne unseres Problems gesprochen: daß a und c sich rösseln und ebenso b und d ; alsdann können wir alle 64 Punkte hintereinander durchlaufen, indem wir von a zu c gehen, dann den linken Kreis durchlaufen bis d , von hier zu b und nun über die Punkte des rechten Kreises zu a zurück gehen. 2 Paare solcher Felder finden wir aber leicht; wir haben ein Beispiel in Fig. 15 durch die Buchstaben a, b, c, d

1) Bei Vandermonde ist allerdings diese zweite Kette in dem Beispiel, das uns sonst hier als Vorlage gedient hat (s. Fig. 5 der Vandermonde'schen Figurentafel), nach einem anderen Prinzip konstruiert, doch scheint uns die obige Konstruktion mehr dem Geist der Methode angepaßt.

angegeben; von den Linien $a - b$ und $c - d$ gehört die eine der einen Kette der 32 Felder, die andere der anderen Kette an, und die Felder rösseln sich paarweise.

§ 9. Methode Ciccolini's.

Teilte Vandermonde das Schachbrett in 4 Quadranten, so teilte Ciccolini¹⁾ wieder die 16 Felder jedes Quadranten in 4 Quadrupel, so zwar, daß sich die Felder desselben Quadrupels hintereinander durchlaufen lassen. Hieran schlossen sich weitere, dieselbe Methode behandelnde Arbeiten von Lavernède²⁾ (1839), Roget³⁾ (1840), Clausen⁴⁾ (1853), Polignac⁵⁾ (1861 und 1881) und Laquière⁶⁾ (1880) an. Ob und inwieweit dieselben von einander abhängen, ist nicht zu entscheiden, da in keiner derselben die vorhergehenden Arbeiten erwähnt sind.

Die Einteilung der 64 Felder in 16 Quadrupel giebt Fig. 17, in der wir die bei Parallelverschiebung der Quadranten coincidierenden Quadrupel nach Polignac⁷⁾ durch gleiche Buchstaben (klein oder groß, gestrichelt oder ungestrichelt) bezeichnen und nach Roget⁸⁾ die Buchstaben so

1) T. Ciccolini, „Del cavallo degli Scacchi.“ Paris 1836.

2) Lavernède, Problème de situation. Mémoires de l'académie du Gard. 1838/39, p. 151—179. Man findet hier eine eingehende Berücksichtigung der Beschränkung durch vorgeschriebenes Anfangs- und Endfeld.

3) Roget (hervorragender Physiolog), Description of a Method of moving the Knight etc. Philos. Magaz. XVI, 1840, p. 305—309.

4) Clausen, Direkte Auflösung des Rösselsprungs. Archiv f. Math. u. Phys. XXI, 1853, p. 91—92.

5) Polignac, „Sur la course du cavalier au jeu des échecs.“ Comptes rendus de Paris 1861, t. 52, p. 840—842 und „Note sur la marche du cavalier dans un échiquier“, Bulletin de la société mathém. de France IX, 1881, p. 17—24.

6) Laquière, „Solutions régulières du problème d'Euler sur la marche du cavalier“, Bull. de la soc. math. VIII, 1880, p. 82—102; 132—158.

7) In der Arbeit von 1881.

8) l. c. p. 307.

gewählt haben, daß von einem durch einen Vokal (Konsonanten) bezeichneten Quadrupel zu den Feldern des durch den anderen Vokal (Konsonanten) bezeichneten ein Übergang unmöglich ist, während alle anderen Übergänge möglich sind.

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>E</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>e</i>
<i>C</i>	<i>E</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
<i>B</i>	<i>A</i>	<i>E</i>	<i>C</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>c</i>
<i>E</i>	<i>C</i>	<i>B</i>	<i>A</i>	<i>e</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>a</i>
<i>a'</i>	<i>b'</i>	<i>c'</i>	<i>e'</i>	<i>A'</i>	<i>B'</i>	<i>C'</i>	<i>E'</i>
<i>c'</i>	<i>e'</i>	<i>a'</i>	<i>b'</i>	<i>C'</i>	<i>E'</i>	<i>A'</i>	<i>B'</i>
<i>b'</i>	<i>a'</i>	<i>e'</i>	<i>c'</i>	<i>B'</i>	<i>A'</i>	<i>E'</i>	<i>C'</i>
<i>e'</i>	<i>c'</i>	<i>b'</i>	<i>a'</i>	<i>E'</i>	<i>C'</i>	<i>B'</i>	<i>A'</i>

Fig. 17.

Durch diese Einteilung in Quadrupel erreicht man, daß man nur noch die Verknüpfung von 16 Elementen, eben der 16 Quadrupel, zu bewerkstelligen hat oder richtiger nur von 8, da man ja den Rösselsprung aus 2 symmetrischen Hälften zusammensetzen kann. So liefert z. B. das Schema *e'E'cCA'aBb* die erste Hälfte eines symmetrischen Rösselsprungs, bei dem in der üblichen Notation (s. Kap. VII, Fig. 1) die Eintrittsfelder und Ausgangsfelder der einzelnen Quadrupel sind: *b3 — d4*; *f3 — h4*; *f5 — e7*; *c8 — d6*; *e4 — g3*; *h5 — f6*; *d7 — c5*; *e6 — f8*. Die zweite Hälfte beginnt dann in dem zu *b3* in bezug auf das Centrum symmetrisch gelegenen Feld *g6* und verläuft ganz symmetrisch der ersten, indem in dem Schema die ungestrichenen Buchstaben durch die gestrichenen und umgekehrt ersetzt werden. — Man kann aber auch die Quadrupel desselben Buchstabens aneinanderreihen, wie schon Roget (a. a. O.) angegeben hat. Von einem Vokalquadrupel, dessen

4 Felder einen Rhombus bilden, ist zwar, wie schon oben gesagt, zu einem Quadrupel des anderen Vokals ein Übergang nicht möglich, wohl aber zu den Quadrupeln desselben Vokals in den anliegenden Quadranten, und das Entsprechende gilt für die Quadrate bildenden Konsonantenquadrupel. Zeichnen wir z. B. die 4 Rhomben A, a, A', a' , so sehen wir, daß wir diese zu einem zusammenhängenden Zug verbinden können, indem wir in allen 4 Rhomben je eine Seite fortnehmen und durch einen Verbindungs-Springerzug

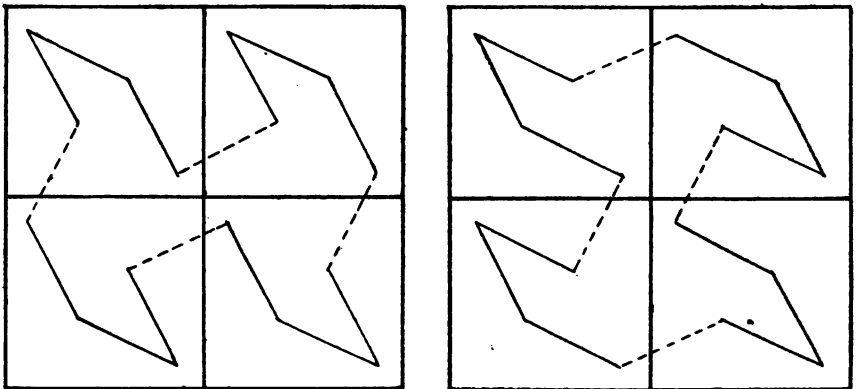


Fig. 18.

ersetzen, wobei die fortgenommenen Seiten einander parallel sind. Für die fortzunehmende Seite können offenbar in jedem Rhombus nur 2 in Betracht kommen, nämlich die nach den anliegenden Quadranten zu liegenden, und man erhält so die 4 Quadrupel A auf 2 Arten zu einem „Zuge“ vereinigt, wie Fig. 18 dies angiebt.¹⁾ Offenbar betritt man bei einer bestimmten Umlaufung die Quadranten entweder alle auf weißem oder alle auf schwarzem Feld. Von den 2 Zügen, welche sich aus je 4 zusammengehörigen Quadrupeln bilden lassen, führt der eine nun bei Umlaufung im Uhrzeigersinne in jedem Quadranten

1) Vgl. Laquière, l. c. p. 93 u. 139.

zuerst auf ein weißes, bei dem anderen auf ein schwarzes Feld. Hiernach erhalten wir eine naturgemäße Scheidung der Züge und bezeichnen die ersteren als Züge *A, E, B, C*

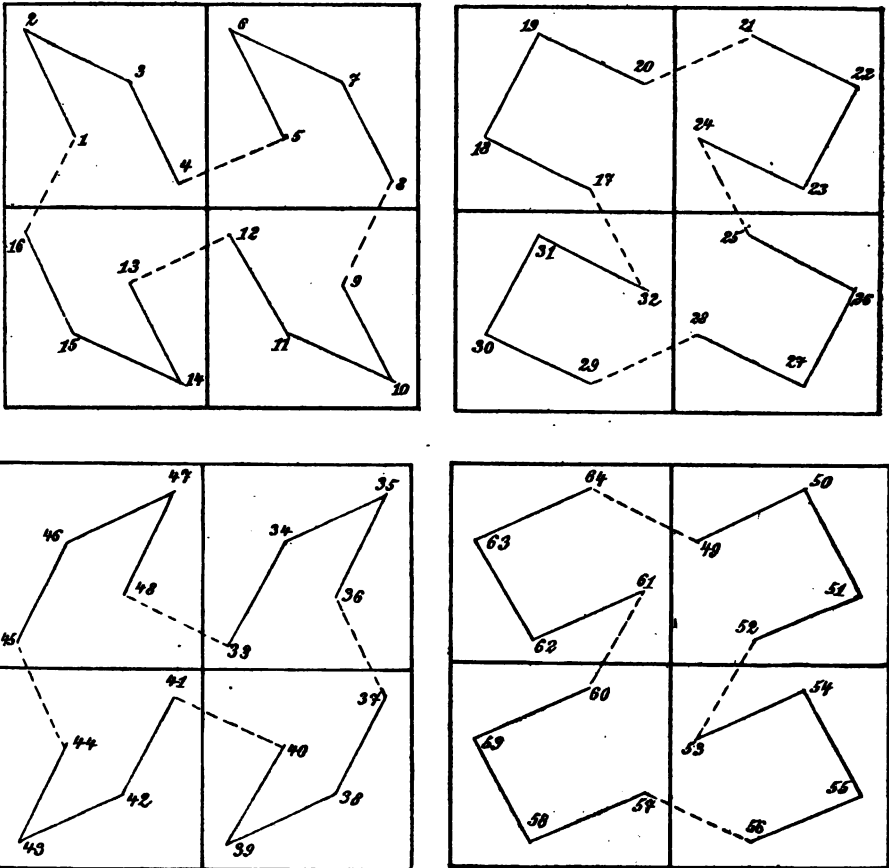


Fig. 19.

je nach den Quadrupeln, welche sie enthalten, und die letzteren als A_1, E_1, B_1, C_1 . Bei dieser von Roget angebahnten und Herrn Laquière weiter ausgebauten Auffassung haben wir es nur noch mit 4 statt 64 Elementen zu thun, eben 4 Zügen

von je 16 Feldern. Eine Verbindung derselben muß so erfolgen, daß man von einem „Vokalzug“ zu einem „Konsonantenzug“ übergeht, also in dem Cyklus $ABEC$. Jedoch können statt dieser Züge auch beliebig die der anderen Art eintreten, nur müssen die Züge verschiedener Art in verschiedener Richtung durchlaufen werden. So liefert also z. B. A_1BEC_1 auch einen Rösselsprung. Dies giebt im ganzen offenbar 16 und zwar geschlossene Rösselsprünge, von denen jeder in doppelter Richtung beschrieben werden kann.¹⁾ — Wenn es auch nicht in unserer Absicht liegt, über diese kurze Skizzierung der Laquière'schen Untersuchungen hinauszugehen, so wollen wir doch noch der größeren Anschaulichkeit halber einen Laquière'schen Rösselsprung in Fig. 19 abbilden.²⁾

§ 10. Methode von Frost.

Eine interessante und anscheinend wenig bekannte Methode für Rösselsprungbildung hat noch Frost entwickelt³⁾, welcher zunächst Lösungen für n (Felderzahl jeder Reihe) = 5, 6, 7, 8 giebt und dann aus diesen durch Ansetzen hufeisenförmiger Bretter die Rösselsprünge für größere Felderzahlen herleitet. Da wir bereits Lösungen für $n = 5, 6, 7, 8$ kennen (s. § 7), beschränken wir uns auf die Bemerkung, daß Frost von solchen ausgeht, bei denen das eine Endfeld das dritte Feld in einer Randreihe ist.⁴⁾

1) Laquière, l. c. p. 134.

2) Laquière, l. c. p. 93. Herr Laquière bildet im letzten Teil seiner umfangreichen Arbeit noch andere interessante Rösselsprünge auf grund der Quadrupelbildung unter den 64 Feldern, so „zweiteilige“ und „spiralförmige“, bei welch letzteren die 16 Felder eines Zuges in veränderter Reihenfolge auftreten etc.

3) „On the knights path.“ Quart. Journ. of Math. XIV, 1877, p. 123—125.

4) l. c. p. 123.

Frost benutzt nun folgende zwei Diagramme¹⁾:

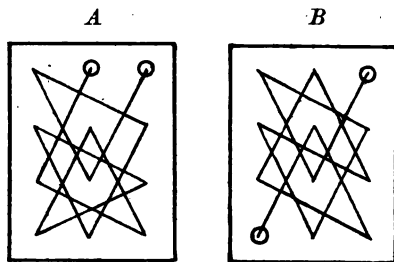


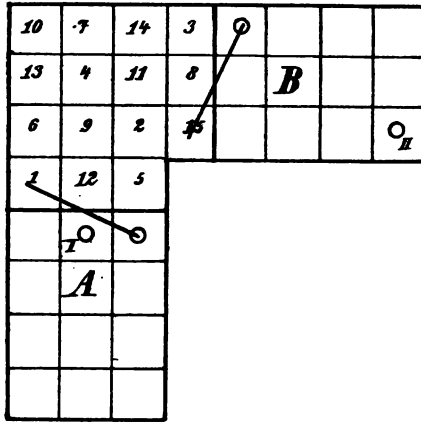
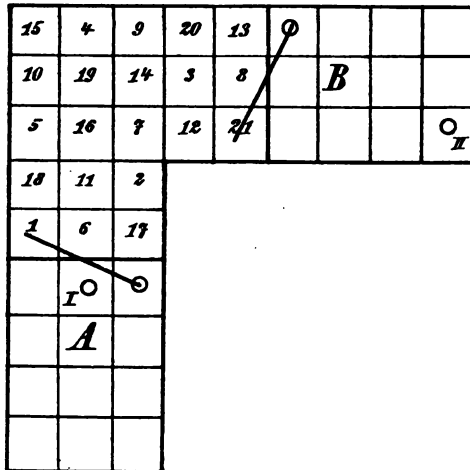
Fig. 20.

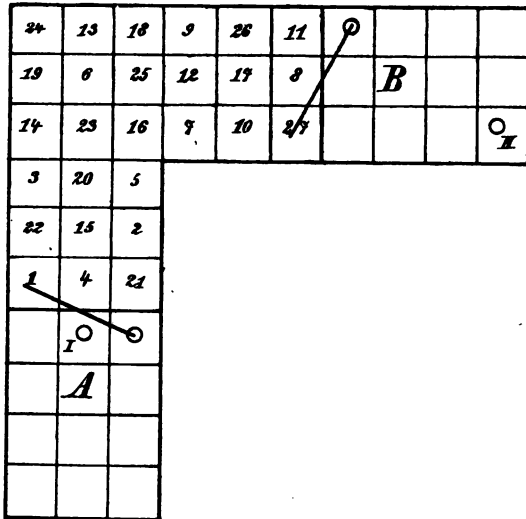
und bildet damit die hufeisenförmigen Diagramme von Fig. 21 auf S. 194 und 195.

In diesen Figuren 21 sind die Endfelder der Diagramme *A* und *B*, für welche wir uns im übrigen auf die oben (Fig. 20) gegebenen Figuren beziehen, durch kleine Kreise angegeben und ihre Verbindung mit dem Mittelstück bzw. untereinander durch eine entsprechende Linie, während die Felder des Mittelstücks nach der Reihenfolge der Durchlaufung numeriert sind. Die Endfelder der ganzen Diagramme D_5, D_6, D_7, D_8 sind außerdem durch *I* und *II* bezeichnet. Diese hufeisenförmigen Diagramme legt man an die Rösselsprünge für $n = 5, 6, 7, 8$, so zwar, daß dasjenige Endfeld der letzteren, welches von einer Ecke aus das dritte Randfeld war, sich mit dem Endfeld *I* der Diagramme rösselt. Durch diese beiden sich rösselnden Endfelder kann man das hufeisenförmige Diagramm mit den Rösselsprüngen verknüpfen und erhält so Rösselsprünge für $n = 8, 9, 10, 11$, und zwar ist das eine Endfeld (*II*) wieder das dritte Feld einer Randreihe. Für größere Werte von n , zunächst für $n = 12, 13, 14, 15$, erhält man dann die Rösselsprünge wieder aus den zuletzt erhaltenen; die hierzu erforderlichen Diagramme $D_9, D_{10}, D_{11}, D_{12}$ bekommt man bzw. aus den Diagrammen D_5, D_6, D_7, D_8 , indem man in diesen an *B* noch ein *B* (s.

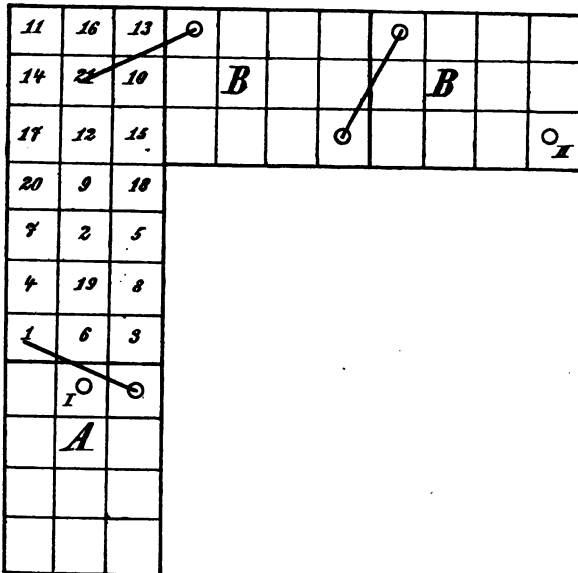
1) Die Rösselsprünge *A* und *B* finden sich als Beispiele für rechteckige Bretter schon bei Euler, l. c. p. 336 (der vierte der Euler'schen Rösselsprünge ist unser *A*, der zweite das Spiegelbild von *A*, der dritte das von *B*). — Uns sind beide bereits in § 6 begegnet; vgl. auch S. 175, Anm. 1.

die Figur für D_5) und zwischen das Mittelstück und A gleichfalls ein B legt, das hier offenbar hineinpaßt und die Verbindung zwischen beiden herstellt. Die Endfelder dieser neuen hufeisenförmigen Diagramme haben dann wieder die verlangte Lage, so daß nach diesem Prinzip die Rösselsprungbildung beliebig weit fortgesetzt werden kann.

 D_5  D_6



D_1



D_8
Fig. 21.

§ 11. Magische Rösselsprünge.

Die in § 9 unter Benutzung der Quadrupel gebildeten Rösselsprünge stehen nicht nur methodisch über anderen, durch bloßes Probieren gefundenen, sondern unterscheiden sich von diesen auch durch eine gewisse Regelmäßigkeit im Aussehen vorteilhaft. Eine regelmäßige Gliederung des Rösselsprungs in anderer Hinsicht hatten wir ferner in § 8 besprochen, wo Ketten von Springerzügen auftraten, die bei Drehungen des Bretts um 90° resp. 180° ineinander übergingen. Was nun die Symmetrieverhältnisse allgemein anlangt, so überzeugt man sich dagegen leicht, daß weder in bezug auf die horizontale noch die vertikale Mittellinie des Bretts noch auch in bezug auf eine Diagonale eine symmetrische Anordnung der Springerzüge des Rösselsprungs möglich ist.¹⁾ In bezug auf das Mittelfeld symmetrisch war ja der von uns in Fig. 6, S. 173 reproducierte Rösselsprung Euler's. Eine besonders kunstvolle Form der Rösselsprünge sind diejenigen, bei denen die Ziffern, welche die Reihenfolge der Felder angeben, in jeder Zeile und jeder Kolonne eine konstante Summe ergeben. Solche Rösselsprünge, welche danach also die Haupteigenschaft²⁾ der im nächsten Kapitel zu besprechenden magischen Quadrate aufweisen und daher „magische“ resp. „semi-magische“ genannt werden, wurden zuerst von Beverley³⁾ angegeben, jedoch waren dessen Rösselsprünge ungeschlossen; die ersten geschlossenen magischen Rösselsprünge konstruierte Wenzelides.⁴⁾ Wir geben in Fig. 22

1) s. Wenzelides, „Bemerkungen über den Rösselsprung nebst 72 Diagrammen.“ Schachzeitung IV, 1849, p. 44.

2) Die ihnen noch abgehende Eigenschaft der magischen Quadrate, nämlich auch in den beiden Diagonalen die konstante Ziffernsumme zu liefern, scheint hier eine Unmöglichkeit zu sein.

3) s. von Oppen, William Beverley's Rösselsprung. Schachzeitung II, 1847, p. 21—24; vgl. a. Wihnyk, Zum Problem des Rösselsprungs. Deutsche Schachzeitung, 40. Jahrg. 1885, p. 98—101; 289—294.

4) vgl. dessen Arbeiten in Schachzeitung IV, 1849, p. 41—93; V, 1850, p. 212—221; 230—248; VI, 1851, p. 286—297; besonders aber von Oppen, Rösselsprung, Schachzeitung XIII, 1858, p. 174/175.

einen besonders kunstvollen, in dem schon mehrfach erwähnten „Traité“ von Jaenisch vorkommenden.¹⁾ Derselbe ist nicht nur geschlossen und magisch, insofern als alle Zeilen und Kolonnen die konstante Ziffernsumme 260 ergeben, sondern er ist auch symmetrisch, da die Kette 1—32 durch Drehung des

50	11	24	63	14	37	26	35	260
23	62	51	12	35	34	15	38	260
10	40	64	31	40	13	36	27	260
01	22	9	52	33	28	39	16	260
48	7	60	1	20	41	54	29	260
59	4	45	8	53	32	17	42	260
6	47	2	57	44	19	30	65	260
3	58	5	46	31	56	43	18	260
260	260	260	260	260	260	260	260	

Fig. 22.

Bretts um 180° in die Kette 33—64 übergeht; er läßt sich ferner in 2 getrennte geschlossene halbe Rösselsprünge zerlegen, da 1 und 32 einer-, 33 und 64 andererseits sich rösseln.

1) Ich entnehme denselben einer Besprechung des „Traité“ durch v. d. Lasa, Schachzeitung XVII, 1862, p. 66. Von weiterer Litteratur citieren wir Frolow, Les carrés magiques, wo für ein 25-feldriges Brett 2 magische Rösselsprünge angegeben sind; ferner Exner, Der Rösselsprung als Zauberquadrat. Progr. des Gymn. zu Hirschberg 1876, wo 1-, 2-, 3- und 4-summige (d. h. mit höchstens 4 verschiedenen Summen in allen Zeilen und Kolonnen) Rösselsprünge konstruiert werden; Franz Rösselsprung, Schachzeitung II, 1847, p. 341—343. Die Zahl aller bisher bekannten magischen Rösselsprünge gab General Parmentier auf den Kongressen der Assoc. franç. pour l'avanc. des sc. zu Marseille 1891 und Pau 1892 auf 110 an (s. die Comptes rendus der genannten Gesellsch. XX, t. I, p. 158 und XXI, t. I, p. 156, sowie Intermédiaire des mathématiciens t. I, p. 8, Question 31).

§ 12. Kubische Rösselsprünge.

Zu einer Erweiterung unseres Problems gelangen wir, wenn wir uns das aus kleinen Quadraten bestehende Brett durch einen aus kleinen Würfeln zusammengesetzten Kubus ersetzt denken und nun die kleinen Würfel als die „Felder“ des Springers ansehen, von denen aus er sich jetzt in den 3 Dimensionen des Raumes ebenso bewegt, wie zuvor in den 2 der Ebene. Herr Frost¹⁾ hat wohl zuerst solche „kubischen Rösselsprünge“ gebildet und zwar für 5^3 , 6^3 , 7^3 und 8^3 Felder. Für 3^3 Felder giebt es natürlich keinen Rösselsprung, da das Mittelfeld sich mit keinem anderen rösselt. Dagegen giebt es für 4^3 Felder Rösselsprünge; ein von Herrn Schubert²⁾ nach der Ciccolini'schen Methode der Quadrupel gebildeter geschlossener Rösselsprung ist der folgende:

<i>I</i>	<i>II</i>																																
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>10</td><td>7</td><td>22</td><td>17</td></tr> <tr><td>21</td><td>18</td><td>9</td><td>6</td></tr> <tr><td>8</td><td>11</td><td>20</td><td>23</td></tr> <tr><td>19</td><td>24</td><td>5</td><td>12</td></tr> </table>	10	7	22	17	21	18	9	6	8	11	20	23	19	24	5	12	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>27</td><td>62</td><td>15</td><td>2</td></tr> <tr><td>14</td><td>1</td><td>26</td><td>63</td></tr> <tr><td>61</td><td>28</td><td>3</td><td>16</td></tr> <tr><td>4</td><td>13</td><td>64</td><td>25</td></tr> </table>	27	62	15	2	14	1	26	63	61	28	3	16	4	13	64	25
10	7	22	17																														
21	18	9	6																														
8	11	20	23																														
19	24	5	12																														
27	62	15	2																														
14	1	26	63																														
61	28	3	16																														
4	13	64	25																														
<i>III</i>	<i>IV</i>																																
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>42</td><td>37</td><td>56</td><td>51</td></tr> <tr><td>55</td><td>52</td><td>43</td><td>40</td></tr> <tr><td>38</td><td>41</td><td>50</td><td>53</td></tr> <tr><td>49</td><td>54</td><td>39</td><td>44</td></tr> </table>	42	37	56	51	55	52	43	40	38	41	50	53	49	54	39	44	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>57</td><td>30</td><td>47</td><td>38</td></tr> <tr><td>48</td><td>33</td><td>58</td><td>31</td></tr> <tr><td>29</td><td>60</td><td>35</td><td>46</td></tr> <tr><td>34</td><td>45</td><td>32</td><td>59</td></tr> </table>	57	30	47	38	48	33	58	31	29	60	35	46	34	45	32	59
42	37	56	51																														
55	52	43	40																														
38	41	50	53																														
49	54	39	44																														
57	30	47	38																														
48	33	58	31																														
29	60	35	46																														
34	45	32	59																														

Fig. 23.

Die Figuren *I*, *II*, *III*, *IV* geben dabei die 4 Schichten

1) Quart. J. of Mathem. XIV, 1877, p. 124.

2) „Zwölf Geduldspiele“ p. 45/46.

von je 16 Würfeln, in welche der ganze Würfel zerlegt werden kann, und zwar *I* etwa die oberste u. s. w. der Reihe nach.

Für 5^3 Felder bildet Herr Frost einen Rösselsprung, indem er in jeder der 5 horizontalen Schichten einen solchen, wie er ihn zuvor in der Ebene gebraucht hatte¹⁾, bildet, nämlich so, daß die Endfelder derselben das erste und dritte Randfeld von einer Ecke aus sind. Die 5 Schichten werden dann so übereinander gelegt, daß alle Anfangsfelder übereinander liegen und ebenso alle Schlusfelder. Der Würfel bietet dann mit jener Seitenfläche der Endfelder den in Fig. 24

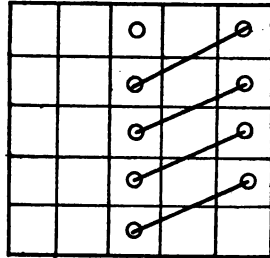


Fig. 24.

angegebenen Anblick, und die einzelnen Rösselsprünge lassen sich, wie in Fig. 24 angegeben, leicht zu einem verknüpfen.

Auch die übrigen Fälle kubischer Rösselsprünge erledigen sich so einfach, daß ein näheres Eingehen darauf überflüssig ist.

§ 13. Anzahlbestimmungen.

Die Gesamtzahl aller auf dem gewöhnlichen Schachbrett möglichen Rösselsprünge ist natürlich eine sehr große. Eine genaue Bestimmung derselben erfordert „Rechnungen von wahrhaft unermesslicher Länge.“²⁾ Unter der Annahme, daß bei vorgeschriebenen Endfeldern nur noch ein vollständiger Rösselsprung möglich ist, einer Annahme, die natürlich nicht im entferntesten zutrifft, giebt es schon 116 wesentlich verschiedene Rösselsprünge.³⁾ Eine Erledigung hat die Anzahlbestimmung bisher erst für ein Brett von 4×8 Feldern, also

1) l. c. p. 123; s. auch S. 192 dieses Kapitels.

2) Minding, Crelle's Journal l. c. p. 80.

3) Nash, Educational Times Repr. Bd. 53, 1890, p. 36—38; vgl. auch Deutsche Schachz. XXVIII, 1873, p. 283.

für ein halbes Schachbrett, durch Herrn Flye St.-Marie¹⁾ erfahren, der die 32 Felder in 2 Klassen teilt, nämlich in die Klasse der in Fig. 25 numerierten und die der unnumerierten, und nun folgendermassen schliesst: Die „äusseren Felder“, d. h. die Felder der ersten und letzten Zeile, rösseln nur „innere“ Felder und zwar nur solche derselben Klasse; man kommt also zu den äusseren Feldern immer nur von einem inneren Felde. Wenn nun auch ein äusseres Feld eventuell Anfangsfeld sein kann, so muss man doch, um zu den übrigen 15 äusseren Feldern der Reihe nach zu gelangen, jedesmal von einem inneren Felde dazu überspringen; dies erfordert 15 innere Felder,

1		5		9		13	
2		6		10		14	
	4		8		12		16
	3		7		11		15

Fig. 25.

und es darf daher nur einmal auf ein inneres Feld wieder ein inneres Feld folgen. Andererseits ist dies letztere aber auch notwendig, da es nur so möglich wird, die Felder der einen Klasse an die der anderen zu reihen. Anfangs- und Schlusfeld sind daher notwendig äussere Felder, woraus nebenbei folgt, dass der Rösselsprung nie geschlossen sein kann; jeder Rösselsprung über die 32 Felder setzt sich daher notwendig aus 2 Ketten von je 16 Feldern zusammen, von denen die eine alle Felder der einen, die andere alle der anderen Klasse umfasst. Wir bestimmen daher zunächst nur die Anzahl der Möglichkeiten, die Felder einer Klasse zu durchlaufen, und zwar, je nachdem wir in 1, 5, 9, 13 anfangen.

1) „Note sur un problème relatif à la marche du cavalier sur l'échiquier.“ Bull. soc. mathém. t. V, 1876/77, p. 144—150.

Die Bestimmung ergibt sich durch planmäßiges Abzählen leicht, wobei wir bezüglich der Einzelheiten auf die betreffende Originalarbeit verweisen. Es ergibt sich so, für wieviel Rösselsprünge über alle Felder einer Klasse die einzelnen Felder Endfelder sein können, nämlich

Felder 2, 16	für	118
„ 4, 14	„	42
„ 6, 12	„	32
„ 8, 10	„	54.

Nun kann man an 2 nur ein inneres Feld der anderen Klasse anschließen und zwar eins, das in seiner Klasse dieselbe Lage hat, wie 6 in der ersten, in dem also 32 Rösselsprünge der zweiten Klasse endigen, so daß es also mit diesem bestimmten Übergang zwischen den beiden Klassen

$$118 \cdot 32 = 3776 \text{ Rösselsprünge}$$

für die 32 Felder giebt. In entsprechender Weise werden nun die Lösungen mit anderen Übergängen bestimmt, wobei unter Ausschluss von symmetrisch gelegenen Rösselsprüngen als Gesamtzahl aller Rösselsprünge für die 32 Felder sich 7772 ergibt.

Diese Untersuchungen hat Herr Laquière¹⁾ benutzt, um darauf basierend für das gewöhnliche Schachbrett die Zahl aller geschlossenen zweiteiligen (s. S. 168) Rösselsprünge zu bestimmen. Die Endfelder jedes Teiles sind nach dem Obigen äußere Felder der betreffenden Hälfte und müssen, wenn der ganze Rösselsprung, wie verlangt, geschlossen sein soll, in jeder Hälfte in der an die andere angrenzenden Zeile liegen. Bezeichnen wir nun die Felder der zweiten Klasse ebenso wie die entsprechenden der ersten Klasse und versehen sie mit Strichen (s. Fig. 26), so wäre z. B. ein zweiteiliger Rösselsprung möglich, für dessen erste Hälfte 1' und 7 die Endfelder sind. Ein

1) „Note sur le nombre des marches rentrantes etc.“ Bull. soc. math. IX, 1881, p. 11—17.

solcher 32-feldriger Rösselsprung setzt sich zusammen aus 2 Teilen, dem der 16 Felder der ersten Klasse und dem der zweiten Klasse. Die Verbindung dieser beiden Teile kann u. a. durch den Übergang 6'—2 erfolgen. Mit 7 und 2 als Endfeldern giebt es aber nach Flye St.-Marie 16 Rösselsprünge über die 16 Felder der ersten Klasse und mit 1' und 6' als Endfeldern 8 für die zweite Klasse, also $16 \cdot 8 = 128$ für die 32 Felder mit 7 und 1' als Endfeldern und 2—6' als Übergang zwischen beiden Klassen. Die entsprechenden Zahlen für alle sonst noch möglichen Übergänge bestimmt man ebenso und

1	3'	5	7'	9	11'	13	15'
2	4'	6	8'	10	12'	14	16'
2'	4	6'	8	10'	12	14'	16
1'	3	5'	7	9'	11	13'	15

Fig. 26.

findet als Gesamtzahl aller Rösselsprünge der 32 Felder der einen Schachbretthälfte mit 1' und 7 als Endfeldern: 772. Die gleiche Bestimmung führt man für alle möglichen anderen Kombinationen von Endfeldern aus und in ähnlicher Weise, wie zuvor 2 Züge von je 16 Feldern, verbindet man jetzt deren zwei von je 32 Feldern und findet dann als Gesamtzahl aller zweiteiligen geschlossenen Rösselsprünge überhaupt 31054144.¹⁾

Dabei sind 2 zu einander symmetrische Rösselsprünge einzeln gezählt, desgleichen die sich nur durch die Durchlaufungsrichtung unterscheidenden, sowie diejenigen, welche dadurch auseinander hervorgehen, daß das Schachbrett ja auf 2 Arten, nämlich durch eine horizontale und durch eine vertikale Mittellinie in 2 Hälften zerlegt werden kann.

Es mag noch erwähnt werden, daß der durch seine

1) Laquière l. c. p. 16.

Untersuchungen über Sonnenflecken bekannte Züricher Astronom Rud. Wolf unser Problem experimentell in Angriff genommen hat.¹⁾ Er bezeichnete die 64 Felder des Schachbretts mit den Zahlen 1—64, zog aus einer Urne eine dieser Nummern, welche ihm damit das Ausgangsfeld vorschrieb und zog dann wieder aus einer weiteren Urne unter den von diesem Felde aus möglichen und systematisch bezeichneten Springerzügen einen, bis er zu einem Felde kam, von dem ein neuer Springerzug nicht mehr möglich war. Wolf stellte so 1000 Versuche an, von denen jeder durchschnittlich etwa $\frac{1}{4}$ Stunde erforderte. Einen vollständigen Rösselsprung erreichte er dabei überhaupt nicht und nur je einen von bezw. 59, 58, 57, 56 Feldern und keinen von grösserer Felderzahl.

§ 14. Das Problem des Bretttaufs für die übrigen Schachfiguren.

Im Anschluß an das Rösselsprungproblem mögen in diesem § für die anderen Figuren²⁾ des Schachspiels entsprechende Fragestellungen erhoben werden, wenn auch hier die Beantwortung erheblich einfacher ist und auch in erster Linie nur mit Rücksicht auf eine spätere Anwendung (s. Kap. XX, § 4) gegeben werden soll. Wir beginnen daher mit folgender Aufgabe:

Auf einem beliebigen rechteckigen Brett von $m \times n$ Feldern soll ein Turm von einem beliebigen Feld ausgehend der Reihe nach alle Felder, jedes jedoch nur einmal, passieren und zu dem Ausgangspunkt zurückkehren, wobei ein Feld, über das er hinweggegangen, auch als passiert angesehen werden soll und daher nicht mehr zum zweiten Mal passiert werden darf.

1) Vierteljahrsschrift der naturforsch. Gesellsch. in Zürich 1894, p. 147—164.

2) Bezüglich der Gangarten der Figuren verweisen wir den damit etwa nicht vertrauten Leser auf Kap. IX, § 1 und Anhang.

Wenn der Turm wieder zum Ausgangspunkt zurückkehren soll, so muß offenbar jede seiner Bewegungen durch eine parallele, aber entgegengesetzt gerichtete gewissermaßen wieder aufgehoben werden; es folgt daraus ohne weiteres, daß die Aufgabe nur dann lösbar ist, wenn die Anzahl der Felder gerade, also wenigstens eine der Größen m und n gerade ist. Dasselbe sieht man auch sofort dadurch ein, daß bei einer schachbrettartigen Ausführung der Felder in zwei Farben der Turm bei jedem Zuge von einem Feld bis zum benachbarten die Farbe wechselt, also nur bei gerader Anzahl zum Ausgangsfeld zurück-

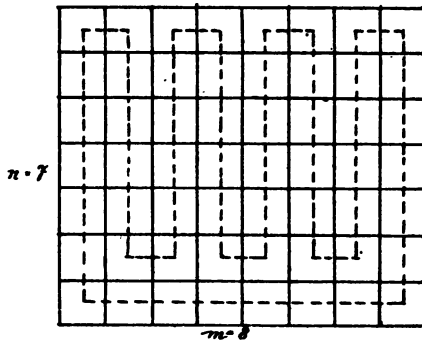


Fig. 27.

kehren kann. Diese Bedingung der geraden Felderzahl ist aber auch hinreichend; die Fig. 27 giebt für einen speciellen Fall eine Lösung, welche entsprechend offenbar für jeden Fall eines geraden $m \cdot n$ möglich ist. Ist $m \cdot n$ dagegen ungerade, so ist die Aufgabe nicht lösbar, jedoch können $mn - 1$ Felder nacheinander in der vorgeschriebenen Weise passiert werden, wie sich leicht folgendermaßen ergibt: Von den $m \cdot n$ Feldern denken wir uns eins, etwa das links unten in der Ecke, fort und lösen nun zunächst in derselben Weise wie in Fig. 27 die Aufgabe für $(m - 1)n$ Felder; die in Fig. 28 hierfür angegebene Bahn setzt sich aus einer ausgezogenen und punktierten Linien zusammen. Denkt man sich die aus-

gezogene Linie nun fort und ersetzt sie durch die gekreuzte (xxxxxx), so hat man die gesuchte Bahn für die $mn - 1$ Felder.

Stellen wir dieselbe Frage für die übrigen Figuren des Schachspiels, so sehen wir zunächst, daß für König und

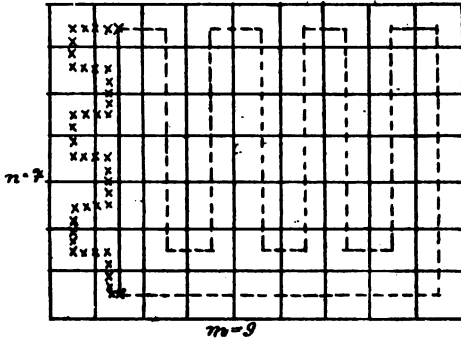


Fig. 28.

Königin die Aufgabe stets lösbar ist; denn sie dürfen den oben angegebenen Weg des Turms beschreiben und, falls für diesen die Aufgabe nicht lösbar ist und ein Feld unpassiert bleibt,



Für den Läufer, welcher stets an eine bestimmte Farbe

1) Bei dieser Wanderung der Königin setzt sich ihre Bahn auf dem gewöhnlichen Schachbrett aus mindestens 16 Zügen zusammen. Fordert man jedoch nur, daß jedes Feld mindestens einmal passiert wird, ohne eine mehrmalige Passage desselben Feldes zu verbieten, so läßt sich das Verlangte in 14 Zügen leisten, z. B. $a1 - a8 - h8 - h1 - b7 - h7 - b1 - b5 - f1 - c1 - g5 - g1 - b6 - f6 - a1$ (vgl. S. Loyd, „The Queens Tour“ in Cook, Henry and Gilberg, American Chess-Nuts. New-York 1868, p. 396).

gebunden ist, bleiben natürlich die Felder der anderen Farbe stets unerreichbar; aber auch wenn wir nur fordern, daß alle Felder der betreffenden Farbe bestrichen werden, ist die Aufgabe nur in vereinzelt Fällen lösbar. Zunächst darf unter den Feldern der betreffenden Farbe offenbar kein Eckfeld sein, da dieses für den Läufer nur einen Zugang hat; daher muß also das rechteckige Brett in beiden Dimensionen eine ungerade Anzahl von Feldern aufweisen, und es kommen dann nur die Felder in Betracht, welche nicht die Farbe der Eckfelder besitzen. Man erkennt aber durch Probieren leicht, daß auch hier nur 2 Fälle übrig bleiben, nämlich die der quadratischen Bretter von 9 und 25 Feldern. Verlangt man dagegen nicht gerade eine geschlossene, sondern nur eine zusammenhängende, alle Felder der Farbe umfassende Bahn — eine Bedingung, unter der die entsprechende Aufgabe für den Turm stets lösbar, aber auch trivial ist —, so ist unsere Aufgabe bei richtiger Wahl des Anfangsfeldes noch in folgenden Fällen lösbar:

- 1) für alle quadratischen Bretter von ungerader Felderzahl,
- 2) für alle rechteckigen Bretter von $m \cdot n$ Feldern, wenn m und n ungerade sind und der Unterschied zwischen beiden = 2 ist;

beide Male jedoch nur für diejenige Farbe, welche nicht die der Eckfelder ist.

Man erkennt dies leicht folgendermaßen: Zunächst darf offenbar — abgesehen von den trivialen Fällen von $2 \cdot n$ Feldern — auch jetzt kein Feld der betreffenden Farbe Eckfeld sein und daher müssen, wenn das rechteckige Brett aus $m \cdot n$ Feldern besteht, m und n ungerade sein. Weiter sieht man leicht, daß man von einem Randfeld ausgehend, ohne Mühe alle Felder der beiden äußeren Reihen passieren kann, so daß dann nur noch die Felder eines rechteckigen Brettes von $(m - 4)(n - 4)$ Feldern zu passieren sind. Andererseits muß aber die Durchlaufung der Felder der beiden äußeren Reihen auch in dieser Weise erfolgen, da jedes Randfeld für den Läufer nur 2 Zugänge hat.

Ein solches Gebiet der zwei äußeren Reihen, welches ja auch beim Rösselsprungproblem (s. § 7) eine Rolle spielte wollen wir kurz einen „Rand von Zweifelderbreite“ nennen und auf demselben eine „innere“ und „äußere“ Seite unterscheiden. Die äußere Seite enthält stets 4 Felder mehr als die innere. Die Durchlaufung eines solchen Randes geschieht in der Weise, daß auf ein inneres Feld stets ein äußeres folgt und auf ein äußeres auch stets ein inneres außer an den 4 Ecken, wo auf ein äußeres wieder ein äußeres folgt. Beginnt die Durchlaufung eines solchen Randes also auf einem inneren Felde, so endigt sie jedenfalls auf einem äußeren.

Für ein vorgelegtes Brett von $m \cdot n$ Feldern kann unsere Aufgabe also höchstens dann lösbar sein, wenn sie es für ein Brett von $(m - 4)(n - 4)$ Feldern ist. Dies führt uns dazu, zunächst die einfachsten Fälle zu untersuchen, nämlich diejenigen, in denen die kleinere der Größen m und n , etwa m , 1 oder 3 ist. Für $m = 1$ muß $n = 1$ oder $n = 3$ sein und $m = 3$ bedingt: $n = 3$ oder $n = 5$. Diese Fälle sind lösbar; aber nicht nur sie, sondern auch alle diejenigen, welche sich aus ihnen ergeben, indem wir um diese Bretter successive „Ränder von Zweifelderbreite“ herumlegen. Ist zunächst $m = 1$, $n = 1$ oder, wie wir gleich besser annehmen: $m = 5$, $n = 5$, so haben wir nur einen „Rand“ mit einem andersfarbigen Feld in der Mitte und brauchen nur auf der inneren Seite des Randes zu beginnen und beendigen dann, wie oben angegeben, die Durchlaufung auf der äußeren Seite; von hier aus können wir dann auf die innere Seite eines eventuellen weiteren Randes übertreten und diesen wieder wie oben durchlaufen, um auf einem äußeren Felde die Durchlaufung zu beschließen u. s. w. Für $m = 3$, $n = 3$ haben wir nur 4 Felder zu durchlaufen, von deren jedem ein Übergang zu einem herumgelegten Rand möglich ist, so daß sich dieser Fall ebenso wie der vorige erledigt und damit die Möglichkeit für jedes Quadrat ungerader Felderzahl dargethan ist. Für $m = 1$, $n = 3$ hat man von der betreffenden Farbe nur ein Feld und kann von diesem dann zu der inneren Seite eines etwaigen Randes über-

treten und die Felder dieses Randes dann durchlaufen, um auf einem äußeren Felde desselben zu endigen und von hier eventuell auf einen weiteren Rand überzugehen u. s. w. Für $m = 3$, $n = 5$ sind die 7 Felder der betreffenden Farbe leicht hintereinander zu durchlaufen, wobei die Endfelder beide äußere Felder sind, so daß sich an jedes der beiden Enden die Durchlaufung etwaiger Ränder anschließen läßt. Damit ist aber auch der oben angegebene zweite Fall erledigt.

Kapitel XII.

Magische Quadrate.

It is, perhaps, a mark of the good sense of our English mathematicians, that they would not spend their time in things that were merely difficles nugae incapable of any useful application. — In my younger days, having once some leisure, which I still think I might have employed more usefully, I had amused myself in making these kind of magic squares.

BENJAMIN FRANKLIN. Experiments and observations on electricity. London 1769, p. 350.

§ 1. Historische Einleitung.

Auf einem „Melencolia“ genannten Kupferstich¹⁾ Albrecht Dürer's vom Jahre 1514 findet sich aufser anderen allegorischen Figuren auch ein 16-zelliges Quadrat (s. Fig. 1), ausgefüllt mit den Zahlen 1—16, so zwar, daß die Zahlen jeder Zeile (Horizontalreihe), wie jeder Kolonne (Vertikalreihe), sowie auch jeder der beiden Diagonalen eine konstante Summe und zwar hier 34 ergeben. Auf dieser Darstellung der Melancholie als des sinnenden und grübelnden Geistes dient das Quadrat natürlich zur allegorischen Versinnbildlichung der Arithmetik

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Fig. 1.

1) Es mag ausdrücklich hervorgehoben werden, daß die „Melencolia“ nicht ein Holzschnitt ist, wie in der einschlägigen mathematischen Litteratur überall gesagt ist, sondern ein Kupferstich (vgl. R. v. Retberg, Dürer's Kupferstiche und Holzschnitte, München 1871, p. 80). Derselbe bildet neben 2 anderen, nämlich dem „Hieronymus in der Zelle“ (1514) als Phlegmatiker und dem „Rittersmann trotz Tod und Teufel“ (1513)

als einer der Wissenschaften, welche ein tiefes Nachdenken, eine völlige Hingabe erfordern.¹⁾ — Ein Quadrat von den angegebenen Eigenschaften bezeichnen wir heute als ein „magisches“; das Dürer'sche ist das älteste in Europa vorkommende. Als Heimat der magischen Quadrate findet man gewöhnlich Indien angegeben, doch fehlt hierfür jeder zwingende Grund.²⁾ Sicher ist nur, daß arabische Astrologen Kenntniss von ihnen besaßen und ihrer merkwürdigen Eigenschaften wegen sich ihrer bedienten³⁾, wie solche Quadrate auch heute noch in Indien als Talismane und Amulette verwandt werden sollen⁴⁾; im Mittelalter erfreuten sie sich nicht nur eines astrologischen, sondern sogar eines medizinischen Ansehens, das selbst einen Mann vom Schlage des Theophrastus Paracelsus veranlassen konnte, — wenn auch nur vorübergehend — zu ihrer Fahne zu schwören.⁵⁾ Auf weitere historische Einzelheiten dürfen wir hier um so eher verzichten, als die magischen Quadrate in dem bereits mehrfach citierten Werke des Herrn Günther eine eingehende historische Würdigung gefunden haben. Überhaupt ist die Litteratur über diese Materie so außerordentlich um-

als Sanguiniker, ein Fragment aus einer unvollendeten Darstellung der 4 Temperamente (vgl. A. von Eye, Albrecht Dürer's Leben und künstlerische Thätigkeit. 1892, p. 53 u. 54, oder Woltmann, „Dürer“ in Deutsche Biogr. V, p. 480). Nach Kürten, „Theorie der magischen Zahlen-Quadrate und Kreise“. Köln 1886 befindet sich das Original der „Melencolia“ in den Sammlungen von Heinr. Lempertz sen. in Köln.

1) Um auch aus der Architektur Beispiele von solchen Quadraten anzuführen, mag hier auf das 81-zellige an der Villa Albani in Rom, das 1766 in Marmor hergestellt ist, sowie auf das an dem Festungsthor der indischen Stadt Gwalior (in Sanskritzeichen) (s. Frost, Quart. Journ. of Math. VII, p. 93) hingewiesen werden.

2) s. Günther, „Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften.“ Leipzig 1876, p. 188.

3) s. Günther, l. c. p. 191.

4) Früher waren solche Amulette jedenfalls viel in Gebrauch, s. die von Günther l. c. p. 268 angeführten Belege, sowie Mollweide, De quadratis magicis, Leipzig 1816 (Vorrede) und Massip, Mém. de l'Acad. de Toulouse 9^{ième} série, t. IV, 1894, p. 440.

5) s. Günther, l. c. p. 217.

fangreich, daß es uns in dem Rahmen dieses Buches unmöglich ist, allen Erscheinungen auf diesem Gebiete gerecht zu werden.

§ 2. Magische Quadrate von 9 und 16 Zellen.

Wir beginnen das Studium solcher Quadrate mit dem einfachsten, dem von 9 Zellen; denn ein 4-zelliges Quadrat der verlangten Art ist offenbar eine Unmöglichkeit. Sollen die neun ersten Zahlen der Zahlenreihe so in die 9 Zellen eines Quadrats eingeordnet werden, daß zunächst alle Horizontalreihen dieselbe konstante Summe ergeben, so muß also, da die Summe aller 9 Zahlen 45 beträgt, diese konstante Summe jeder Zeile 15 sein. Dieselbe Summe soll dann auch jede Kolonne und jede der beiden Diagonalreihen ergeben — so will es die Definition eines „magischen Quadrats“. Denken wir uns das magische Quadrat bereits fertig und addieren die Zahlen der mittleren Zeile, der mittleren Kolonne und der beiden Diagonalreihen, so müssen wir also $4 \cdot 15 = 60$ erhalten; andererseits kommt in dieser Summe jede der 9 Zahlen gerade einmal vor, nur die Zahl der Mittelzelle 4-mal. Da nun die Summe der 9 Zahlen 45 beträgt, so muß also in der Mittelzelle die 5

stehen. Dann müssen aber 2 gegenüberliegende Eckfelder (1 und 9 oder 3 und 7 in Fig. 2) und ebenso 2 gegenüberliegende Mittelzellen (2 und 8 oder 4 und 6) entweder beide mit ungeraden oder beide mit geraden Zahlen besetzt werden, da mit der 5 in der Mittelzelle

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Fig. 2.

sich sonst in den Diagonalreihen resp. den Mittelachsen nicht eine ungerade Summe (15) ergeben würde. Die 4 Eckzellen können aber jedenfalls nicht mit ungeraden Zahlen besetzt werden, da dann die Randzeilen und Randkolonnen gerade Summen ergeben würden. Würden nur 2 gegenüberliegende Eckzellen mit ungeraden Zahlen besetzt, so müßten also die anderen beiden disponiblen ungeraden Zahlen in 2 gegenüberliegende mittlere Randzellen gesetzt werden, aber dann erhielte man offenbar wieder

2 Reihen mit je 2 ungeraden und einer geraden Zahl, also einer geraden Summe entgegen unserer Forderung. Die ungeraden Zahlen müssen daher in die mittleren Randzellen und die

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Fig. 3.

geraden in die Eckzellen gesetzt werden. Hierauf sieht man sofort, daß man 8 Lösungen erhält, deren eine die der Fig. 3 z. B. ist. Aus ihr gehen die übrigen 7 durch Drehungen und Spiegelungen hervor (vgl. hierzu Kap. IX, § 3).

Wir wenden uns jetzt zu dem Fall eines 16-zelligen Quadrats. Dabei wollen wir für die Summen der verschiedenen Zeilen, Kolonnen und Diagonalreihen die in Fig. 4 angegebenen Bezeichnungen kurz anwenden.

	K_1	K_2	K_3	K_4	Z_1
Z_1	1	2	3	4	
Z_2	5	6	7	8	
Z_3	9	10	11	12	
Z_4	13	14	15	16	
Z_5					

Fig. 4.

Da die Summe der ersten 16 Zahlen $(1 + 16) + (2 + 15) + \dots + (8 + 9) = 8 \cdot 17$ ist, so muß jede Zeile, Kolonne und Diagonalreihe die Summe $2 \cdot 17 = 34$ ergeben, wenn das Quadrat ein magisches sein soll. Da alsdann $D_1 + D_2 + K_2 + K_3 + Z_2 + Z_3 = 6 \cdot 34$ ist, andererseits die angegebenen Reihen aber jede der 16 Zahlen je einmal, nur die Zahlen des inneren

Quadrats der 4 Zellen 6, 7, 10, 11 (s. Fig. 4) je dreimal enthalten, so folgt, daß die Zahlen dieses inneren Quadrats auch die Summe 34 ergeben müssen. Diese 4 Zahlen machen aber mit den 4 Eckzahlen zusammen die beiden Diagonalreihen aus, woraus also folgt, daß auch das Quadrat der vier Eckzahlen die Summe 34 ergeben muß. Die Zahlen des inneren Quadrats bilden ferner mit den Zahlen des Rechtecks 2, 3, 14, 15 zusammen zwei volle Kolonnen K_2 und K_3 , so daß also auch die Zahlen des Rechtecks 2, 3, 14, 15 die Summe 34 ergeben müssen und ebenso offenbar auch die des Rechtecks 5, 9, 8, 12. Die konstante Summe 34 tritt also nicht nur in den Zeilen, Kolonnen und Diagonalreihen auf, sondern auch noch stets in 2 Quadraten und 2 Rechtecken. Die Bedeutung dieser Quadrate und Rechtecke tritt auch hervor in einer von dem bekannten

Rechenmeister Adam Riese¹⁾ herrührenden Vorschrift zur Bildung eines 16-zelligen magischen Quadrats, dahin gehend, in der ursprünglichen Anordnung der Fig. 4 nur je zwei gegenüberliegende Zahlen der oben erwähnten 2 Quadrate zu vertauschen. In der That erhalten wir so das magische Quadrat der Fig. 5.

16	2	3	13
5	11	10	6
9	7	6	12
4	14	15	1

Fig. 5.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Fig. 6.

Statt dessen hätten wir auch ebenso gut die gegenüberliegenden Zahlen in den beiden oben erwähnten Rechtecken vertauschen dürfen, um so das magische Quadrat der Fig. 6 zu erhalten. Übrigens ergibt sich aus dem letzteren durch Vertauschung der beiden mittleren Kolonnen das in § 1 angegebene Dürer'sche Quadrat.²⁾

Die konstante Summe 34 tritt in den Figg. 5 und 6 noch an zahlreichen anderen Konfigurationen auf, so, wenn wir hinsichtlich der Bezeichnung auf Fig. 5 rekurrirten, in den Quadranten 16, 2, 5, 11 und den 3 entsprechenden, in den Springer-Vierenzügen 16, 7, 1, 10 und 3, 5, 14, 12 und je einem weiteren entsprechenden, in dem Rechteck 16, 2, 9, 7 und 7 entsprechenden, in dem Rechteck 16, 3, 6, 9 und 3 entsprechenden, in dem Parallelogramm 16, 2, 1, 15 und 3 entsprechenden, in dem Rechteck 2, 5, 15, 12 und einem entsprechenden, in dem Parallelogramm 3, 11, 14, 6 und 3 entsprechenden u. s. w.

1) In dem unter Nr. 5 unseres litterarischen Index aufgeführten Werke (s. Günther, l. c. p. 219).

2) Sämtliche 880 sechzehn-zellige magische Quadrate sind angegeben von Frenicle de Bessy, „Des carrés magiques.“ Divers ouvrages de math. et de phys. Par Ms de l'académie Royale des Sciences 1693, p. 484—503.

§ 3. Quadrate von ungerader Zellenzahl.

Für die Konstruktion von Quadraten ungerader Zellenzahl bietet sich heute bei einiger zahlentheoretischer Bildung gewissermaßen von selbst eine Methode dar, welche durch die s. Z. sehr verdienstvollen Arbeiten von La Loubère, de La Hire und Sauveur begründet wurde. Um die Gedanken zu fixieren, legen wir den nach Behandlung der 9- und 16-zelligen Quadrate (§ 2) sich uns zunächst anbietenden Fall eines 25-zelligen Quadrats zu grunde. Dabei stellen wir die Zahlen 1—25 als Zahlen eines Systems mit der Grundzahl 5 dar, nämlich folgendermaßen:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
 1 = 0 + 1 & 6 = 5 + 1 & 11 = 10 + 1 & 16 = 15 + 1 & 21 = 20 + 1 \\
 2 = 0 + 2 & 7 = 5 + 2 & 12 = 10 + 2 & 17 = 15 + 2 & 22 = 20 + 2 \\
 3 = 0 + 3 & 8 = 5 + 3 & 13 = 10 + 3 & 18 = 15 + 3 & 23 = 20 + 3 \\
 4 = 0 + 4 & 9 = 5 + 4 & 14 = 10 + 4 & 19 = 15 + 4 & 24 = 20 + 4 \\
 5 = 0 + 5 & 10 = 5 + 5 & 15 = 10 + 5 & 20 = 15 + 5 & 25 = 20 + 5.
 \end{array}$$

Jede der 25 Zahlen stellt sich durch 2 Zahlen dar, einen „Einer“ und einen „Fünfer“, von denen die ersteren 1, 2, 3, 4, 5, die letzteren 0, 5, 10, 15, 20 sind. Die für das magische Quadrat ausschlaggebende konstante Summe der Zeilen u. s. w. ist offenbar nichts anderes als die Summe aller verschiedenen Fünfer und Einer ($1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 0 + 5 + 10 + 15 + 20$), und diese konstante Summe wird also in allen Zeilen und Kolonnen auftreten, wenn wir die Zahlen so in die 25 Zellen einordnen, daß wir bei Benutzung der obigen Schreibweise in jeder Zeile wie Kolonne lauter verschiedene Einer und lauter verschiedene Fünfer haben. Hiernach teilt sich unsere Aufgabe von selbst in 2 Teile: eine passende Anordnung der Einer und eine hierzu passende der Fünfer, aus denen beiden wir dann das verlangte Quadrat komponieren.

Um das passende Quadrat der Einer zu erhalten, schreiben wir in die 5 Zellen der obersten Zeile die 5 Einer, wobei wir — aus einem weiter unten ersichtlichen Grunde — mit der mittleren Zahl 3 beginnen, und füllen dann die nächste

Zeile aus, indem wir die fünf Zahlen der obersten Zeile um eine Stelle nach rechts cyklisch vertauschen u. s. w. (s. Fig. 7a). Dann stehen offenbar nicht nur in jeder Zeile, sondern auch in jeder Kolonne die 5 Einer; die Summe der Zahlen ist also in allen Zeilen und Kolonnen dieselbe. Die eine Diagonale weist stets die mittlere Zahl 3 auf, so daß ihre Summe offenbar dieselbe ist wie die einer Zeile oder Kolonne. Die Zahlen der anderen Diagonale erhält man, indem man in der obersten Zeile, von der letzten Zahl 5 ausgehend, nach links cyklisch um je 2 Stellen vorrückt; man erhält so, da die Zellenzahl einer Reihe ungerade ist, offenbar successive alle 5 Zahlen, nämlich 5, 2, 3, 4, 1, so daß also die Zahlen dieser Diagonale auch dieselbe Summe ergeben wie die der anderen und die der Zeilen und Kolonnen.

3	1	2	4	5
5	3	1	2	4
4	5	3	1	2
2	4	5	3	1
1	2	4	5	3

Fig. 7a.

0	5	15	20	10
5	15	20	10	0
15	20	10	0	5
20	10	0	5	15
10	0	5	15	20

Fig. 7b.

Wir bilden nun in entsprechender Weise ein zweites Quadrat mit den Fünfern 0, 5, 10, 15, 20; nur setzen wir jetzt die mittlere Zahl (10) an das Ende der obersten Zeile und führen die verschiedenen cyklischen Vertauschungen statt nach rechts, wie zuvor, nach links aus. Wir erhalten so die Anordnung der Fig. 7b, in der wieder alle Zeilen und Kolonnen, sowie eine der Diagonalen die 5 verschiedenen Fünfer aufweisen, mithin alle die gleiche Summe ergeben, während die Zellen der anderen Diagonale alle von der mittleren Zahl 10 besetzt sind, so daß auch hier die Summe dieselbe ist wie in den Zeilen und Kolonnen.

Komponieren wir nun unsere beiden Hilfsquadrate, indem wir die Zahlen entsprechender Zellen des einen und des anderen addieren (s. Fig. 8), so erhalten wir offenbar ein Quadrat, in dem jede Zeile, Kolonne und Diagonale dieselbe Summe ergibt und zwar die für das magische Quadrat vorgeschriebene. Es fragt sich nur, ob bei dieser Komposition auch wirklich alle Zahlen 1—25 auftreten und nicht etwa die eine gar nicht, eine andere mehrere Male, mit anderen Worten: ob jeder Einer mit jedem Fünfer gerade einmal komponiert wird.

3	6	17	24	15
10	18	21	12	4
19	25	13	1	7
22	14	5	8	16
11	2	9	20	23

Fig. 8.

Um dies einzusehen, schreiben wir die Einer der ersten Zeile von Fig. 7a auf die Peripherie eines Kreises (Fig. 9) und entsprechend die Fünfer der ersten Zeile von Fig. 7b auf die Peripherie eines dazu konzentrischen Kreises, so zwar, daß 2 Zahlen entsprechender Zellen übereinander stehen.

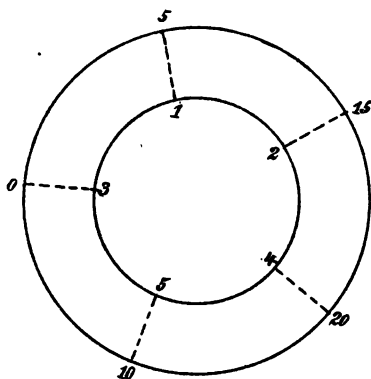


Fig. 9.

Die oberste Zeile der Fig. 8 ergibt sich dann durch Addition der übereinanderstehenden Zahlen der beiden Kreise ($0 + 3, 5 + 1$ u. s. w.). Um die nächste Zeile von Fig. 8 zu erhalten, müssen wir erst die Zahlen des inneren Kreises um einen Platz im Uhrzeigersinne und die des äußeren gleichfalls um einen Platz, aber im umgekehrten Uhrzeigersinne drehen und dann wieder die übereinanderstehenden Zahlen addieren.¹⁾

1) Der verschiedene Drehungssinn ist natürlich bedingt durch die verschiedene Art der vorher angewandten zyklischen Vertauschungen (einmal nach rechts, das andere Mal nach links); bei gleicher Drehung der Kreise würden natürlich stets dieselben Zahlen übereinander stehen.

Anstatt nun die Zahlen jedes der beiden Kreise um je einen Platz und zwar im entgegengesetzten Drehungssinn zu verschieben, können wir auch ebenso gut die des einen, etwa des äußeren, festhalten und die des inneren um je zwei Plätze verschieben, also 3 an die Stelle von 2 rücken u. s. w. Dann sieht man aber, daß eine bestimmte Zahl der Einer der Reihe nach mit jedem Fünfer zusammenkommt, da eben der Kreis in eine ungerade Anzahl von Teilen geteilt ist.

Damit ist aber die Richtigkeit unserer Methode endgültig dargethan, und man sieht leicht, daß dieselbe allgemein für ungerade Zellenzahl anwendbar ist, da von den Eigenschaften der Zahl 5 bei der Beweisführung nur die eine wesentlich war, nicht durch 2 teilbar zu sein.

Andererseits sind aber natürlich keineswegs alle nur möglichen magischen Quadrate diesem Bildungsgesetz unterworfen; so würde z. B. das Quadrat¹⁾

7	6	5	24	23
22	12	11	16	4
25	17	13	9	1
8	10	15	14	18
3	20	21	2	19

bei der Darstellung seiner Zahlen durch Einer und Fünfer auf das Einerquadrat

2	1	5	4	3
2	2	1	1	4
5	2	3	4	1
3	5	5	4	3
3	5	1	2	4

führen, welches keineswegs den Regeln der obigen Methode entspricht.

§ 4. Andere Methoden für ungerade Zellenzahl.

Zahlreiche Methoden, so verschieden auch ihre Formulierungen erscheinen mögen, beruhen doch nur auf diesem so-

1) s. Frolov, Le problème d'Euler et les carrés magiques. Paris 1884.

eben in § 3 entwickelten Prinzip; dies für einige der interessanteren zu zeigen, soll die Aufgabe dieses § sein.

I. Eine Methode der Inder.

Zunächst besprechen wir eine Methode, welche nach den rühmlichst bekannten Reisebeschreibungen des französischen Regierungsbevollmächtigten de La Loubère im Besitz der Inder von Surate gewesen sein soll.¹⁾ Die Vorschrift lautet folgendermaßen: *Man schreibe die 1 in die Mitte der obersten Zeile, dann 2 als unterste Zahl der rechts von der Mitte befindlichen Kolonne und hierauf in diagonaler Richtung nach oben fortschreitend 3, 4 ..., so zwar, daß, wenn man den rechten Rand erreicht, man am linken in der darüber befindlichen Zeile fortfährt und, wenn man den oberen Rand erreicht, man am unteren in der rechts davon befindlichen Kolonne fortfährt.* Kommt man auf ein schon besetztes Feld, so setzt man die neue Zahl auf das Feld direkt unter dem zuletzt ausgefüllten.²⁾

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

Fig. 10.

Die Anwendung dieser Vorschrift liefert z. B. das 49-zellige Quadrat der Fig. 10.

Der Beweis für die Richtigkeit dieser Methode ergibt sich folgendermaßen: Die Anzahl der Zellen einer Reihe sei $n = 2m + 1$ (ungerade); wir denken uns die einzuordnenden n^2 Zahlen wieder wie in § 3 dargestellt als Zahlen eines Systems mit der Grundzahl n , also:

1) de La Loubère, „Du Royaume de Siam.“ Amsterdam und Paris 1691, tome II, p. 237.

2) Diese Regel gilt nur für ungerade Zellenzahl. Nach La Loubère sollen die Inder zwar auch ein Verfahren für gerade Zellenzahl besessen haben, doch wufste sein Gewährsmann ihm dasselbe nicht anzugeben, so daß er hierüber nur Vermutungen ausspricht (l. c. p. 273).

$$\begin{array}{ccc}
 0 + 1, & 0 + 2 \dots & 0 + n \\
 n + 1, & n + 2 \dots & n + n \\
 2n + 1, & 2n + 2 \dots & 2n + n \\
 \vdots & \vdots \dots & \vdots \\
 \vdots & \vdots \dots & \vdots \\
 (n-1)n + 1, & (n-1)n + 2 \dots & (n-1)n + n
 \end{array}$$

und bezeichnen die hier in je einer Zeile geschriebenen Zahlen kurz als eine „ n -ade“; alle Vielfachen von n in diesen Summen, also $0, n, 2n \dots (n-1)n$, mögen die „ n -er“ und die zweiten Summanden, also $1, 2 \dots n$, die „Einer“ heißen. Bei der angegebenen Methode sind nun diejenigen Linien des Quadrats ausgezeichnet, welche parallel zu der von unten links nach oben rechts (\diagup) gehenden Diagonale verlaufen. Während eine Diagonale selbst n Zellen umfaßt, lassen sich die ihr parallelen Zellenreihen paarweise so zusammenfassen, daß je ein Paar zusammen auch n Zellen umfaßt; ein solches Paar wollen wir jetzt einmal eine „gebrochene Diagonale“ nennen. Entsprechend den 2 Hauptdiagonalen giebt es offenbar 2 Systeme solcher gebrochenen Diagonalen. Die angegebene Vorschrift involviert nun offenbar, daß die Zahlen einer n -ade gerade in die n Zellen einer solchen gebrochenen Diagonale \diagup kommen, von deren n Zellen nie 2 derselben Zeile oder Kolonne angehören, so daß jeder n -er offenbar je einmal in jede Zeile und in jede Kolonne gelangt. Die n -er der verschiedenen Zeilen gehen also dadurch auseinander hervor, daß die der obersten um eine Stelle nach links cyklisch vertauscht werden müssen, um die der nächsten zu ergeben (s. Fig. 10). Auf ein bereits besetztes Feld stößt man bei Befolgung der Vorschrift offenbar immer dann und nur dann, wenn eine n -ade gerade placiert ist; denn so lange finden die Zahlen eben auf den Zellen einer gebrochenen Diagonale Platz. Die letzte Zahl einer n -ade grenzt in ihrer diagonalen Linie wieder an die erste Zahl ihrer n -ade, und unter jene kommt nun die erste Zahl der neuen n -ade, so daß die Anfangszahlen zweier benachbarter n -aden zu einander stehen, wie a und b in Fig. 11, wobei a der früheren

n -ade angehört (falls der Raum nicht mehr gestattet, von a zu einem b durch einen solchen „Springerzug“ (s. Kap. XI, § 1) zu gehen, ist natürlich an die unterste Zeile die oberste wieder anschliessend zu denken und ebenso an die äusserste Kolonne links die letzte rechts). Die ersten Zahlen der verschiedenen n -aden sind nun dadurch charakterisiert, dass ihr Einer stets 1 ist. Man sieht also hieraus, dass die 1 von einer n -ade zur nächsten um eine Kolonne nach links rückt, mithin jede Kolonne gerade eine 1 erhält. Andererseits erhält aber auch jede Zeile gerade eine 1, weil die 1 immer um 2 Zeilen nach unten rückt und dieser Cyklus wegen der ungeraden Anzahl der Zeilen sich nicht eher schließt, als bis jede Zeile gerade einmal vorgekommen ist. Da nun mit der ersten Zahl einer n -ade auch die übrigen entsprechend festgelegt sind, so findet zwischen irgend 2 entsprechenden Zahlen zweier benachbarter n -aden auch gerade die Lagenbeziehung der Fig. 11 statt, und wir folgern daraus, dass jeder Einer in jeder Zeile wie Kolonne gerade einmal vorkommt. Damit ist aber die Konstanz der Summen aller Zeilen und Kolonnen erwiesen. Aber auch für die von unten links nach oben rechts (\swarrow) verlaufende Diagonale ergibt sich dies ohne weiteres; ist sie doch nur ein Spezialfall einer gebrochenen Diagonale \swarrow und umfasst daher gerade eine volle n -ade und zwar — wegen der besonderen Stellung der Zahl 1 in dem Mittelfeld der obersten Zeile — gerade die mittlere, die $(m+1)$ -te n -ade, so dass auch sie der gestellten Bedingung genügt und uns nur noch die andere Diagonale beschäftigt.

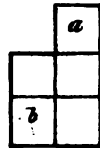


Fig. 11.

Fassen wir nun die Zellen dieser noch restierenden Diagonale \searrow ins Auge, so kommen die n -er ihrer Zellen der Reihe nach in der obersten Zeile offenbar vor in deren 1., 3., 5., 7. etc. Zelle; diese Reihe schließt sich aber bei ungeradem n nicht, bevor alle Zahlen erschöpft sind, und es kommen also alle n -er in der Diagonale \searrow vor. Um auch über die Einer dieser Diagonale Aufschluss zu erhalten, rekurrieren wir einen Augenblick auf Fig. 11 und bemerken, dass in die Zelle unter a

die Zahl $b + 1$ und dann rechts von a die Zahl $b + 2$ kommen würde, wobei wir uns jetzt unter a und b irgend 2 entsprechende, d. h. in den Einern übereinstimmende Zahlen benachbarter n -aden vorstellen dürfen. Da der Einer von $b + 1$ nun um 1, der von $b + 2$ um 2 gröfser als der von a ist, erkennt man, dafs die Einer in jeder Kolonne von oben nach unten um je 1 und in jeder Zeile von links nach rechts um je 2 wachsen, wobei natürlich stets die Reste nach n einschliesslich 0 zu nehmen sind. Dann wachsen aber in der Diagonale \searrow , die sozusagen die Resultierende aus jenen beiden Fortschreitungsrichtungen ist, die Einer von oben nach unten um je 3. Ist nun n nicht durch 3 teilbar, so enthält also auch diese Diagonale alle Einer, und der verlangte Beweis ist erbracht. — Ist aber n durch 3 teilbar, so enthält die Diagonale offenbar nur $\frac{n}{3}$ verschiedene Einer, jeden 3-mal. Hierfür ist nun wesentlich, dafs, bei der Mittelstellung der 1 in der obersten Zeile und der Zunahme der Einer um je 2 von links nach rechts, in der Ecke oben rechts (m Zellen weiter) sich eine Zahl mit dem Einer $1 + 2m \equiv 0 \pmod{n}$ befinden mufs, also in der Ecke oben links, welche als rechte Nachbarin von jener anzusehen ist, eine Zahl mit dem Einer 2. Die in unserer Diagonale je dreimal vorkommenden Einer sind also $2, 5 \dots \frac{n}{3} - 1$, und diese geben, dreimal genommen, offenbar dieselbe Summe wie alle Einer, je einmal genommen. Damit ist auch für ein durch 3 teilbares n der Beweis erbracht.

II. Bachet's Terrassenmethode.¹⁾

Beschränken wir uns auf einen speziellen Fall, etwa den des 25-zelligen Quadrats, und schreiben die 25 Zahlen in der in Fig. 12 angegebenen Weise, wobei die aufserhalb des eigentlichen Quadrats der 25 Zellen liegenden Teile der Figur bzw. als „Terrasse“ I, II, III, IV (s. die Fig.) bezeichnet werden mögen,

1) Bachet, 2. Aufl. 1624 Probl. XXI, p. 161—169.

so schreibt Bachet vor, die Terrassen parallel mit sich zu verschieben, bis ihre Basis (die Quadratseite, auf welcher sie stehen) mit der gegenüberliegenden Quadratseite zusammenfällt. Hierdurch gelangen die außerhalb des Quadrats stehenden Zahlen in die noch leeren Zellen des Quadrats, und es entsteht ein magisches Quadrat (Fig. 13).¹⁾

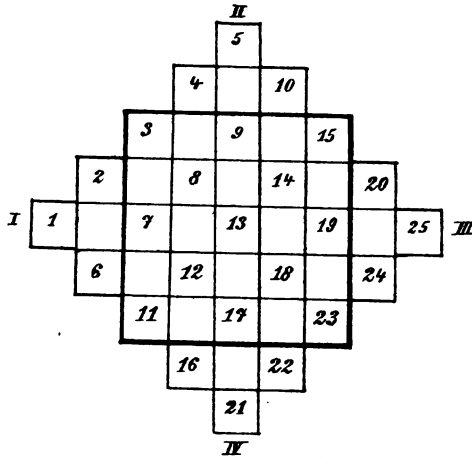


Fig. 12.

Dafs ein so hergestelltes Quadrat stets ein magisches ist, erkennt man leicht folgendermassen: Nehmen wir allgemein ein Quadrat von n^2 Zellen an, so kommen in die Zellen der von unten links nach oben rechts (\swarrow) verlaufenden Diagonale gerade die Zahlen der mittleren n -ade; diese Diagonale genügt also jedenfalls der gestellten Bedingung. Die andere Diagonale be-

1) Diese von Herrn Günther (l. c. p. 204) als „Terrassenmethode“ bezeichnete Methode Bachet's fällt im wesentlichen zusammen mit der ersten der beiden Methoden, welche in einer bereits aus dem 14. Jahrhundert stammenden Abhandlung des Manuel Moschopoulos (s. Günther l. c. p. 195 und Cantor, Gesch. d. Math. Bd. II, p. 480) gegeben werden. Eine textliche Wiedergabe der Abhandlung des Moschopoulos nach einer Handschrift der Münchener Staatsbibliothek findet man bei Günther, l. c. p. 195—203.

kommt dagegen offenbar aus jeder n -ade gerade die mittlere Zahl und genügt daher auch unserer Forderung. Bezeichnen wir nun die Kolonnen des n^2 -zelligigen Quadrats von links nach rechts mit $1, 2 \dots n$, wobei wir die Zellen der Terrassen II und IV in die betreffenden Kolonnen mit einrechnen, weiter die Kolonnen der Terrasse I von links nach rechts mit $-(m-1), -(m-2) \dots -1, 0$, wenn $n = 2m + 1$ ist, und die der Terrasse III mit $n + 1, n + 2 \dots n + m$, so stellen sich die Kolonnen der Zahlen irgend

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

Fig. 13.

einer n -ade offenbar durch n aufeinanderfolgende Zahlen dar, so z. B. in Fig. 12 die der zweiten n -ade durch $0, 1, 2, 3, 4$; und diejenigen Zahlen, deren Kolonnennummer zwischen 1 und n einschliesslich der Grenzen liegt, behalten dieselbe auch bei ihrem etwaigen Einrücken in eins der n^2 Felder, während die Kolonnennummern jenseits dieser Grenzen sich bei dieser Verschiebung um n vergrößern oder verkleinern, so zwar, dass die neuen Kolonnennummern stets innerhalb der Grenzen 1 und n liegen. Dann müssen aber die neuen Kolonnennummern für die Zahlen einer n -ade offenbar stets die Zahlen $1, 2 \dots n$ sein, wenn auch in zyklischer Vertauschung, oder mit anderen Worten: von den Zahlen einer n -ade gehören nie 2 derselben Kolonne an. Entsprechend können wir offenbar zeigen, dass 2 Zahlen derselben n -ade nie derselben Zeile angehören, und weiter, wenn wir die Zahlen nicht zu n -aden zusammenfassen, sondern immer diejenigen, in welchen dieselben „Einer“ (s. oben S. 219) vorkommen, d. h. die Zahlen der zu der Diagonale \searrow parallelen Reihen zusammennehmen, ergibt sich, dass nie zwei Zahlen mit gleichen Einern derselben Zeile oder Kolonne angehören. Damit ist dann gezeigt, dass in jeder Zeile und Kolonne jeder Einer, wie jeder n -er gerade einmal vorkommt, womit unsere Bedingungen alle erfüllt sind.¹⁾

1) Einen rechnerischen, jedoch keineswegs einfacheren Beweis gab

Man erkennt unschwer, daß man die Zahlen jeder n -ade auch in irgend einer anderen Reihenfolge in die schrägen Linien der Fig. 12 einordnen darf mit Ausnahme der mittleren Zahl, welche in ihrer n -ade stets den mittleren Platz behalten muß, nur müssen die Vertauschungen für alle n -aden gleichmäßig gemacht werden; auch dürfen die verschiedenen n -aden — mit Ausnahme der mittleren — beliebig miteinander vertauscht werden. Diese Modifikation der Bachet'schen Methode lehrte zuerst Frenicle de Bessy.¹⁾

III. Moschopulos' Springer-Methode.

In der bereits oben erwähnten Abhandlung des Moschopulos findet sich noch eine zweite Methode, welche wir folgendermaßen aussprechen können:

Man setze bei einem durch 3 nicht teilbaren n die 1 in eine beliebige Zelle des Quadrats, bei einem durch 3 teilbaren n in die Mittelzelle der untersten Zeile²⁾ und gehe dann von hier um eine Kolonne nach rechts und um 2 Zeilen nach oben (Springerzug), setze in die betreffende Zelle die 2 und gehe dann von hier entsprechend weiter. Kommt man dabei an eine schon besetzte Zelle, so gehe man von der zuletzt ausgefüllten in derselben Kolonne 4 Zeilen weiter nach oben und fülle die so erhaltene statt der schon besetzten aus.³⁾ Dabei ist für alle diese Züge die Vorstellung zu

Herr Günther, „Beweis eines Fundamentalsatzes von den magischen Quadraten“, Grunert's Archiv 1875, p. 285—296.

1) l. c. p. 427 ff. Günther giebt („Vermischte Unters.“ u. s. w. p. 235) das Résumé der Frenicle'schen Methode nicht richtig, indem er die Ausnahmestellung der mittleren n -ade und der mittleren Zahlen in jeder n -ade ganz außer Acht läßt.

2) Die Formulierung dieser Methode bei Günther (l. c. p. 205) ist unrichtig, indem die Zelle für 1 allgemein als beliebig angegeben wird; Moschopulos setzt auch — offenbar mit Bewußtsein — (vgl. Günther ibidem) die 1 in eine bestimmte passende Zelle.

3) Über die „magischen Rösselsprünge“ s. Kap. XI, § 11. Diese weisen in allen Zeilen und Kolonnen, nicht dagegen in den Diagonalen die konstante Summe auf, sind also sogenannte „halb-magische“ Quadrate.

grunde zu legen, daß an die oberste Zeile sich wieder die unterste und an die Randkolonne rechts sich wieder die linke Randkolonne anschließt.

Für ein 49-zelliges Quadrat erhält man so die Anordnung der Fig. 14.

Die Richtigkeit des Verfahrens erkennt man leicht folgendermaßen: Denken wir uns wieder die Kolonnen von links

nach rechts durch $1, 2 \dots n$ und die Zeilen ebenso, von unten nach oben gerechnet, bezeichnet, so können wir jede Zelle in der Form a, b charakterisieren, wenn a die Kolonnen- und b die Zeilennummer bedeutet (s. S. 167). Es sei 1 in die Zelle a, b gesetzt, dann kommt 2 in die Zelle $a + 1, b + 2$ u. s. f., und man sieht, daß die Zahlen der ersten n -ade alle in verschiedenen Kolonnen, näm-

21	39	8	33	2	27	45
5	23	48	17	42	11	29
38	14	32	1	26	44	20
23	47	16	41	10	35	4
13	31	7	25	43	19	37
46	15	40	9	34	3	28
30	6	24	49	18	36	12

Fig. 14.

lich in $a, a + 1, \dots n, 1, 2 \dots a - 1$ stehen, aber auch, da n und 2 relativ prim sind, in verschiedenen Zeilen. Die ersten n Zahlen verteilen sich also über n verschiedene Zeilen und Kolonnen; der n -te Springerzug dagegen würde offenbar sowohl für die Kolonnen, wie für die Zeilen den Cyklus schliessen und die Zahl $n + 1$ daher auf das Feld a, b kommen, wenn dies nicht schon durch 1 besetzt wäre. Von dem Feld der Zahl n kann man also durch den angegebenen Springerzug zu dem Feld von 1 gelangen, so daß die gegenseitige Lage die in Fig. 15 angegebene ist und nach der angegebenen Regel die Zahl $n + 1$ in der durch Fig. 15 dargestellten Weise zu placieren ist.

Von der Zelle $n + 1$ schreitet man dann wieder in der alten Weise fort und placiert die Zahlen der zweiten n -ade, bis man etwa wieder auf ein besetztes Feld kommt. Daß der Cyklus der Zahlen der zweiten n -ade für sich sich nicht schliessen kann, bevor alle Zahlen verbraucht sind, ergibt

sich ebenso wie für die erste n -ade. Die Zahlen der zweiten n -ade verteilen sich daher auch alle über verschiedene Zeilen und Kolonnen, wenn man nicht etwa vorher auf ein Feld stößt, das schon durch eine Zahl der ersten n -ade besetzt war. Da nun von $n + 1$ aus die Zahlen der zweiten n -ade nach demselben Gesetz placiert werden, wie die der ersten n -ade von 1 aus, so liegen offenbar 2 entsprechende Zahlen der beiden n -aden genau so zu einander, wie 1 zu $n + 1$ in Fig. 15 — natürlich nur so lange, bis man nicht auf ein schon besetztes Feld stößt. Würde man nun nach Verlassen von $n + l$ etwa auf eine Zelle

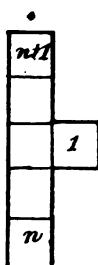


Fig. 15.

stossen, in der sich die Zahl k der ersten n -ade befände, so müßten beide Zellen in der durch Fig. 16 angegebenen Weise zu einander liegen, und l , die zu $n + l$ entsprechende Zahl der ersten n -ade, hätte nach Fig. 15 die in Fig. 16 angegebene Lage, d. h. l und k , 2 Zahlen der ersten n -ade, lägen in derselben Kolonne, was, wie wir wissen, sicher nicht der Fall ist. Die Zahlen der zweiten n -ade finden also auch durchweg leere Zellen vor und nie gehören 2 von ihnen derselben Zeile oder Kolonne an. — Nehmen wir nun an, es seien in dieser Weise bereits eine gewisse Anzahl, etwa p , der n -aden placiert; dann findet man für die folgende Zahl, nämlich $pn + 1$, die betreffende Zelle auch leer. Wäre die betreffende Zelle nämlich nicht leer, sondern etwa durch $ln + k$

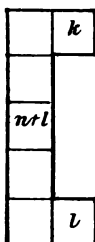


Fig. 16.

besetzt, so müßten auch die zu $pn + 1$ und $ln + k$ entsprechenden und um eine n -ade zurückliegenden Zahlen, also $(p - 1)n + 1$ und $(l - 1)n + k$, dieselbe Lage zu einander haben, d. h. zusammenfallen; es hätte also bereits $(p - 1)n + 1$ nicht placiert werden können, außer wenn $l = 0$, also die betreffende Zahl, welche auf dem für $pn + 1$ bestimmten Platz sich befindet, der ersten n -ade angehört. Nun sieht man aber leicht, daß die Anfangszahlen der verschiedenen n -aden nie mit einer Zahl der ersten n -ade zusammenfallen können; die Plätze der ersteren ergeben sich aus dem Platz a, b der Zahl 1

durch den in Fig. 15 angegebenen Springerzug von 1 zu $n + 1$, ihre Plätze sind also $a - i$, $b + 2i$ ($i = 0, 1 \dots n - 1$), während die Plätze der Zahlen der ersten n -ade $a + k$, $b + 2k$ ($k = 0, 1 \dots n - 1$) sind. Die Bedingung des Zusammenfallens für einen der ersteren mit einem der letzteren wäre dann

$$k \equiv -i \pmod{n}$$

$$2k \equiv 2i \pmod{n},$$

woraus folgt:

$$2i \equiv 0 \pmod{n},$$

also, da n ungerade:

$$i = k = 0.$$

Wenn aber $pn + 1$ placiert ist, finden auch die anderen Zahlen der betreffende n -ade leere Zellen vor; denn das man etwa beim Verlassen der Zelle von $pn + l$ auf ein etwa durch r schon besetztes Feld käme, ist deshalb ausgeschlossen, weil ja die Zahlen jeder n -ade für sich einen geschlossenen Cyklus bilden, der sowohl im Sinne unseres Springerzuges, wie auch im umgekehrten durchlaufen werden kann; es müßte dann also auch die Zelle von $pn + l$ bereits besetzt gewesen sein durch die im Cyklus der betreffenden n -ade zu r vorhergehende Zahl. Damit ist dann aber gezeigt, das bei dem angegebenen Verfahren sich für alle Zahlen stets leere Plätze ergeben aufser bei Abschluss jeder n -ade, das aber dann der „Hilfszug“ — wie wir kurz sagen wollen — stets ein leeres Feld liefert. Ferner sehen wir, das zwei Zahlen derselben n -ade nie derselben Zeile oder Kolonne angehören. Dies können wir offenbar ganz analog von irgend 2 entsprechenden Zahlen verschiedener n -aden nachweisen, da ja die Reihen von je n entsprechenden Zahlen durch den Springerzug der Fig. 15 (von 1 zu $n + 1$) auseinander hervorgehen, und wir können dann also sagen: Jede Zeile, wie Kolonne enthält lauter verschiedene n -er, wie Einer und genügt damit der gestellten Bedingung.

Dasselbe gilt nun aber — im Gegensatz zu den vorhergehenden Methoden dieses § — auch von den Diagonalen, wenn n nicht durch 3 teilbar ist. Steht nämlich die An-

fangszahl einer n -ade auf dem Platz a, b , so stehen die anderen Zahlen der betreffenden n -ade auf den Plätzen $a+i, b+2i$ ($i=0, 1, 2 \dots n-1$); sollen nun 2 dieser Zahlen auf derselben Diagonale oder auf derselben zu einer Diagonale parallelen Linie liegen, so müßte, wenn $a+i, b+2i$ und $a+i', b+2i'$ ihre Plätze sind, offenbar $i-i' \equiv \pm(2i-2i') \pmod{n}$ sein, was jedoch bei verschiedenen Zahlen i und i' nur möglich wäre, wenn n durch 3 teilbar wäre. Ganz analog folgt dies für 2 entsprechende Zahlen verschiedener n -aden, und wir können daher sagen: die Hauptdiagonalen, sowie jede gebrochene Diagonale enthalten — abgesehen von dem angegebenen Ausnahmefall — jeden Einer, wie jeden n -er gerade einmal (vgl. hierzu Kap. XIII, § 2).

Ist n dagegen durch 3 teilbar, so sind bezüglich der Diagonalen noch einige weitere Ausführungen erforderlich. Zunächst denken wir uns die in den beiden diagonalen Richtungen verlaufenden Zahlenreihen paarweise, wie oben (S. 219), zu gebrochenen Diagonalen, jetzt kurz „Diagonalen“ genannt, zusammengefaßt; wir wollen so in jedem der beiden Systeme, also in dem System \swarrow wie in dem \searrow , die Diagonalen als $1, 2 \dots n$ unterscheiden und zwar in dem ersteren, je nachdem ihnen die Felder $1, 2 \dots n$ der untersten Zeile, und in dem letzteren, je nachdem ihnen die Felder $1, 2 \dots n$ der ersten Kolonne links angehören, beide Male nach der üblichen Notation von S. 167 gerechnet. In dem System \searrow hat die Hauptdiagonale also die Nummer n und die zu ihrer Linken liegende diagonale Linie die Nummer $n-1$, während sich zu ihrer Rechten an sie diagonale Linien anschließen, die successive zu den Diagonalen $1, 2 \dots$ gehören; es folgt also, was zu beachten ist, auf n wieder 1. In dem anderen System ist es analog. — Durch bloße Betrachtung der Figur 14 sieht man sofort, daß die Diagonalen \searrow , welchen 2 aufeinanderfolgende Zahlen derselben n -ade angehören, sich bei unserer Numerierung um 3 unterscheiden. Gehört also, wie wir ja für diesen Fall ausdrücklich festsetzten, die Zahl 1 der Diagonale $m+1$ an ($n=2m+1$), so die Zahl 2 der Diagonale $m+4$, die Zahl 3 der Diagonale $m+7$ u. s. w.

Wegen der Teilbarkeit von n durch 3 schließt sich aber diese Reihe bereits nach der Zahl $\frac{n}{3}$, und die Zahlen einer n -ade verteilen sich daher nicht auf alle n Diagonalen \searrow , sondern nur auf $\frac{n}{3}$ derselben, indem in jede dieser je 3 Zahlen der betreffenden n -ade gelangen. Jede Diagonale \searrow weist also nur $\frac{n}{3}$ verschiedene n -er auf, jeden derselben dreimal, so zwar, daß wenn $i \cdot n$ der kleinste derselben ist, die übrigen $(i+3)n$, $(i+6)n$ u. s. w. sind. Die Fig. 15 zeigt uns, daß je 2 entsprechende Zahlen aufeinanderfolgender n -aden Diagonalen \searrow angehören, die in unserer Numerierung sich nur um 1 unterscheiden. Daraus folgt aber, daß ein System von n entsprechenden Zahlen aller n -aden sich auf n verschiedene Diagonalen \searrow verteilt, daß also die Zahlen jeder dieser Diagonalen alle n verschiedenen Einer aufweisen. Ferner ist aus Fig. 15 ersichtlich, daß bei der besonderen Stellung der 1 die Zahl $m \cdot n + 1$ in der Ecke oben links stehen muß. Wenn aber die Hauptdiagonale den n -er $m \cdot n$ besitzt, so ist nach Obigem die Reihe seiner n -er $\dots (m-6)n, (m-3)n, m \cdot n, (m+3)n, (m+6)n \dots$, von denen jeder dreimal vorkommt. Da nun n durch 3 teilbar ist, also $m = 3p + 1$ sein muß, so ist der kleinste n -er dieser Reihe $1 \cdot n$ und der größte $(n-2)n$. Die Reihe dieser n -er, jeden dreimal genommen, giebt aber dieselbe Summe wie die Reihe aller n -er, jeden einmal genommen; z. B. ist $3(1 \cdot 9 + 4 \cdot 9 + 7 \cdot 9) = 0 \cdot 9 + 1 \cdot 9 + 2 \cdot 9 \dots + 8 \cdot 9$. Nimmt man hierzu, daß, wie schon gesagt, die Hauptdiagonale \searrow alle n Einer aufweist, so sieht man, daß sie der an sie gestellten Bedingung genügt, zugleich aber auch, daß nicht alle Diagonalen \searrow , sondern nur der dritte Teil derselben diese Bedingung erfüllt. Daß auch die andere Hauptdiagonale die konstante Summe, wie verlangt, aufweist, ergibt sich ganz analog, wenn man überall die Begriffe Einer und n -er vertauscht.

Wir erhielten in dem Fall eines durch 3 nicht teilbaren n Quadrate, welche außer den Eigenschaften der gewöhnlichen magischen Quadrate auch noch die besitzen, daß jede ge-

brochene Diagonale gleichfalls die konstante Summe aufweist, eine Eigenschaft, die offenbar involviert, daß man die Zeilen wie Kolonnen des Quadrats beliebig vertauschen darf, ohne daß dasselbe aufhört, ein magisches zu sein. Solche Quadrate nennt man nach Lucas¹⁾ „diabolisch“, wir ziehen den von Herrn M^cClintock²⁾ gebrauchten Ausdruck „pandiagonal“ vor. Ohne auf die Theorie dieser Spezialgattung magischer Quadrate näher eingehen zu wollen, wollen wir nur mit Frost bemerken, daß ein solches pandiagonales Quadrat in bezug auf das Mittelfeld symmetrisch ist oder aber in ein symmetrisches verwandelt werden kann, indem man durch Zeilen- und Kolonnenvertauschung die mittlere Zahl $\frac{n^2+1}{2}$ in die Mittelzelle bringt.³⁾

Diese Symmetrie ist so zu verstehen, daß je 2 zum Mittelfeld symmetrisch gelegene Zahlen stets dieselbe Summe $n^2 + 1$ ergeben. Daß diese Symmetrie besteht, erkennt man leicht, wenn man sich das Quadrat folgendermaßen hergestellt denkt:

In die Mittelzelle setze man die mittlere Zahl $\frac{n^2+1}{2}$ und placiere dann mittelst des Moschopulos'schen Springerzuges die nächsten m Zahlen ($n = 2m + 1$) und mittelst des umgekehrten Zuges die vorhergehenden m Zahlen. Damit hat man die mittlere n -ade placiert, so zwar, daß je 2 gleichweit von der mittleren Zahl abstehende Zahlen symmetrisch liegen; dann setzen wir unser Arrangement fort, indem wir nun zunächst an die beiden Enden der mittleren n -ade den angegebenen Hilfszug resp. in inversem Sinne anknüpfen u. s. w.; man erkennt dann ohne weiteres die Symmetrie.

Die in diesem Abschnitt dargelegte, sogenannte „zweite“ Methode des Moschopulos ist nur ein Spezialfall einer weit allgemeineren des Herrn M^cClintock.⁴⁾ Man kann nämlich

1) s. Récréat. mathém. t. I. Introd. XIX.

2) M^cClintock, „On the most perfect forms of magic squares“. Amer. J. of Mathem. XIX, 1897, p. 99.

3) Frost, On the general properties of nasik squares. Quart. Journ. of Mathem. XV, 1878, p. 43.

4) l. c. p. 99—120. Auch die in I. besprochene Methode der Inder

statt des angegebenen Springerzuges zahlreiche andere Ganganarten zu grunde legen, wozu dann in jedem Fall ein passender „Hilfszug“ oder „Kreuzzug“ („cross step“) hinzuzunehmen ist. Bezüglich der näheren Bedingungen, welche für den „direkten“ („direct step“) und den „Hilfszug“ bestehen, verweisen wir auf die betreffende Originalarbeit.

IV. Methode von J. Horner und H. Scheffler.

Das in den zuvor behandelten Methoden enthaltene Prinzip hat eine allgemeine algebraische Formulierung wohl zuerst durch Horner¹⁾ erhalten; sodann hat Herr Scheffler²⁾ — offenbar ohne Kenntnis der Horner'schen Arbeiten — eine allgemeine Methode angegeben, welche im wesentlichen auf dasselbe hinauskommt wie die Horner's. Scheffler's für unsere Zwecke geeignetere Vorschrift lautet folgendermaßen: *Man wähle 4 positive oder negative ganze Zahlen a, b, a', b' aus von der Beschaffenheit, daß eine jede von ihnen, sowie jede der Zahlen $ab' - a'b, a + a', b + b', a - a', b - b'$ relativ prim zu n (event. vom absoluten Werte 1, jedoch nicht = 0) ist. Man erhält alsdann ein magisches Quadrat, indem man die nachstehend angegebenen Zahlenreihen in die n^2 Felder des Quadrats so einsetzt, wie sie in dem Schema gestellt sind:*

$$\begin{array}{r|l|l}
 1+0 & +0 \cdot n & 1+ a+bn & 1+ 2a+2bn & \dots \\
 1+a' & +b'n & 1+(a+a') + (b+b')n & 1+(2a+a') + (2b+b')n & \dots \\
 1+2a' & +2b'n & 1+(a+2a')+(b+2b')n & 1+(2a+2a')+(2b+2b')n & \dots \\
 1+3a' & +3b'n & 1+(a+3a')+(b+3b')n & 1+(2a+3a')+(2b+3b')n & \dots \\
 \cdot & & \cdot & \cdot & \dots \\
 \cdot & & \cdot & \cdot & \dots \\
 \cdot & & \cdot & \cdot & \dots
 \end{array}$$

subsumiert sich unter diese allgemeinere. Dasselbe gilt auch von einer anderen von Frost (Invention of magic cubes etc. Quart. Journ. of Mathem. VII, 1866, p. 97) gegebenen Methode.

1) Horner, On the algebra of magic squares. Quart. Journ. of Mathem. XI, 1870, p. 57—65; 123—132; 213—224.

2) Scheffler, „Die magischen Figuren.“ Leipzig 1882, p. 2 ff.

Dabei sind in jeder Zahl, welche ja ein Trinom von der Form $1 + c + dn$ ist, statt c und d deren kleinste Reste nach n (einschließlich 0 und ausschließlic n) zu nehmen.

So erhält man z. B. für $n = 5$, wenn man, wie zulässig, $a = 2$, $a' = 1$, $b = 1$, $b' = 2$ wählt, folgendes Schema:

$1+0+0\cdot5$ $1+2+1\cdot5$ $1+4+2\cdot5$ $1+1+3\cdot5$ $1+3+4\cdot5$
 $1+1+2\cdot5$ $1+3+3\cdot5$ $1+0+4\cdot5$ $1+2+0\cdot5$ $1+4+1\cdot5$
 $1+2+4\cdot5$ $1+4+0\cdot5$ $1+1+1\cdot5$ $1+3+2\cdot5$ $1+0+3\cdot5$
 $1+3+1\cdot5$ $1+0+2\cdot5$ $1+2+3\cdot5$ $1+4+4\cdot5$ $1+1+0\cdot5$
 $1+4+3\cdot5$ $1+1+4\cdot5$ $1+3+0\cdot5$ $1+0+1\cdot5$ $1+2+2\cdot5$

und hieraus das magische Quadrat Fig. 17.

Bei den so gebildeten Quadraten nimmt 1 stets das obere linke Eckfeld ein, doch ist dies keineswegs unumgänglich notwendig, vielmehr kann in dies Feld ebenso gut jede andere Zahl gesetzt werden, nur muß man dieselbe dann in der Form $1 + p + q \cdot n$ darstellen (p und $q < n$) und bei dem obigen Schema statt von $1 + 0 + 0 \cdot n$ von $1 + p + q \cdot n$ ausgehen, was keiner weiteren Erklärung bedarf.

Dafs die so erhaltenen Quadrate wirklich die geforderten Eigenschaften besitzen, erkennt man leicht: Die „Einer“ derselben Zeile gehen auseinander durch successive Addition von a hervor, und die kleinsten Reste nach n sind in jeder Zeile

1	8	15	17	24
12	19	21	3	10
23	5	7	14	16
9	11	18	25	2
20	22	4	6	13

Fig. 17.

alle verschieden, weil a nach Voraussetzung zu n relativ prim ist; entsprechend ist es mit den n -ern jeder Zeile, welche durch Addition von je $b \cdot n$ auseinander hervorgehen und alle unter sich verschieden sind, da b gleichfalls zu n relativ prim ist. Ebenso wie für die Zeilen ergibt sich dies für die Kolonnen und zwar sowohl bezüglich der Einer, wie bezüglich der n -er. In den Feldern

der Diagonale \searrow gehen die Einer durch Addition von je $a + a'$ und die n -er durch Addition von je $(b + b')n$ auseinander hervor, und hier müssen daher die Einer und n -er

auch alle verschieden sein, weil $a + a'$ und $b + b'$ gleichfalls relativ prim zu n sein sollten. In der Diagonale \diagdown unterscheiden sich die Einer um $a - a'$ und die n -er um $(b - b')n$, so daß also bei unseren obigen Voraussetzungen auch hier der gestellten Forderung genügt wird. Übrigens gilt für jede gebrochene Diagonale in dieser Hinsicht genau dasselbe wie für die zu ihr parallele Hauptdiagonale, so daß also die so erhaltenen Quadrate pandiagonal sind. Es erübrigt nur noch der Nachweis, daß in unserem Schema keine Zahl zweimal vorkommt: irgend 2 Zahlen sind $1 + (k \cdot a + k' a') + (kb + k' b') \cdot n$ und $1 + (l \cdot a + l' a') + (lb + l' b') n$; sollen beide zu derselben Zahl führen, indem man ihre Reste nach n nimmt, so muß schon

$$ka + k'a' \equiv la + l'a' \pmod{n} \text{ und}$$

$$kb + k'b' \equiv lb + l'b' \pmod{n}$$

oder, was dasselbe:

$$(k - l)a + (k' - l')a' \equiv 0 \pmod{n}$$

$$(k - l)b + (k' - l')b' \equiv 0 \pmod{n}$$

sein. Diese Kongruenzen bedingen aber, wenn die Determinante $ab' - a'b$ zu n teilerfremd ist: $k = l$, $k' = l'$. Damit ist aber gezeigt, daß die so gebildeten Quadrate allen an sie gestellten Forderungen genügen.

Ja, dieselben sind sogar, wie schon hervorgehoben, zum übrigen noch pandiagonal. Verzichtet man auf diese Eigenschaft und beschränkt sich auf die an gewöhnliche magische Quadrate gestellten Forderungen, so darf man von den Bedingungen, daß auch $a + a'$, $b + b'$, $a - a'$, $b - b'$ zu n relativ prim seien, absehen, wofern man es nur so einrichtet, daß die mittlere Zahl $\frac{1}{2}(n^2 + 1) = 1 + \frac{n-1}{2} + \frac{n-1}{2} \cdot n$ in das Mittelfeld kommt. Es stehen dann also in der Hauptdiagonale \diagdown gleichweit vom Mittelfeld nach beiden Seiten die Zahlen

$$1 + \left(\frac{n-1}{2} + l(a + a')\right) + \left(\frac{n-1}{2} + l(b + b')\right)n \text{ und}$$

$$1 + \left(\frac{n-1}{2} - l(a + a')\right) + \left(\frac{n-1}{2} - l(b + b')\right)n,$$

und man sieht, daß diese Summe konstant ist, welchen Wert auch l hat. Für die andere Hauptdiagonale ist es ganz entsprechend, und man erkennt, daß man bei vorgeschriebener Besetzung der Mittelzelle derjenigen Bedingungen, welchen oben mit Rücksicht auf die Diagonalen die Zahlen a, a', b, b' unterworfen werden mußten, entraten kann und doch ein magisches Quadrat erhält.

Übrigens hängt die Möglichkeit, pandiagonale magische Quadrate nach der obigen Methode zu konstruieren, natürlich in jedem einzelnen Falle davon ab, ob sich Zahlen a, a', b, b' allen obigen Bedingungen gemäß finden lassen. Dies ist nun nicht möglich, wenn n durch 3 teilbar ist (vgl. Kap. XIII, § 2), sonst aber stets. Denn da a und a' beide zu n relativ prim sein sollen, so dürfen sie jedenfalls nicht durch 3 teilbar sein, sondern geben, durch 3 geteilt, entweder beide denselben, von 0 verschiedenen Rest, oder aber a giebt, durch 3 geteilt, etwa den Rest 1 und a' den Rest 2; auf jeden Fall ist dann aber entweder $a - a'$ oder $a + a'$ durch 3 teilbar, eins von beiden hat also — gegen unsere Bedingung — mit n den Teiler 3 gemeinsam. Ist die ungerade Zahl n dagegen nicht durch 3 teilbar, also von der Form $6\nu + 1$, so genügen $a = 2\nu$, $a' = \nu$, $b = 3\nu$, $b' = \nu$ allen unseren Bedingungen.

§ 5. Quadrate von gerader Zellenzahl.

Die bisher angegebenen Methoden bezogen sich durchweg auf Quadrate von ungerader Zellenzahl. Wir geben daher in diesem § eine Methode, welche für Quadrate von gerader Zellenzahl paßt und welche Herr Ball, angeregt durch C. H. Harrison, angegeben hat.¹⁾

Denkt man sich die Zahlen 1 bis n^2 in natürlicher Reihenfolge in die n^2 Zellen von links nach rechts und von oben

1) W. W. Rouse Ball „Even magic squares“. Messenger of Mathematics XXIII, 1893/94, p. 65—69.

nach unten geschrieben, dann genügen die beiden Diagonalen ohne weiteres der gestellten Bedingung, da in jeder offenbar jeder Einer und jeder n -er je einmal vorkommt, dagegen genügen die Zeilen und Kolonnen der Bedingung natürlich nicht. Bezeichnen wir die vorgeschriebene durchschnittliche Summe $\frac{n(n^2+1)}{2}$ mit M , so ist die Summe der Zahlen der x -ten Zeile von oben ($x < \frac{n}{2}$):

$$(1 + 2 + \dots + n) + (x-1)n^2 = M - \frac{n^2}{2}(n+1-2x)$$

und die der „entsprechenden“ (x -ten) Zeile von unten:

$$M + \frac{n^2}{2}(n+1-2x).$$

Was die eine also zu viel hat, hat die andere zu wenig. Entsprechend ist es mit den Kolonnen: die y -te Kolonne von links ($y \leq \frac{n}{2}$) ergibt als Summe:

$$ny + n \cdot \frac{n(n-1)}{2} = M - \frac{1}{2}n(n+1-2y)$$

und die y -te Kolonne von rechts: $M + \frac{1}{2}n(n+1-2y)$.

Da nun 2 entsprechende Zahlen derselben zwei „entsprechenden“ Zeilen stets denselben Unterschied haben, so können wir den Unterschied zweier entsprechender Zeilen dadurch ausgleichen, daß wir $\frac{n}{2}$ Paare entsprechender Zahlen miteinander vertauschen.

Jede Zahl bleibt dabei in ihrer Kolonne, jedoch stehen sich in 2 entsprechenden Kolonnen im allgemeinen nachher nicht mehr dieselben Zahlen gegenüber, wenn nicht bei den Vertauschungen zwischen den Zeilen hierauf ausdrücklich Rücksicht genommen wurde. Außerdem behält auch die Diagonale im allgemeinen nicht dieselbe Summe. Der Ausgleich zwischen den Kolonnen kann nun in ganz entsprechender Weise erreicht werden. Man erkennt leicht, in welcher Weise sich diese zwiefachen Umsetzungen miteinander ver-

knüpfen lassen, und es ergeben sich hiernach folgende Vorschriften:

1) n ist durch 4 teilbar. Man teile das ganze Quadrat in 16 Teile, wie Fig. 18 dies angiebt, und kann nun entweder in allen mit a bezeichneten Gebieten oder in allen Gebieten b jede Zahl mit der ihr gerade gegenüberliegenden vertauschen, wo wir unter 2 einander gegenüberliegenden Zahlen 2 solche verstehen, von denen Zeile und Kolonne der einen denen der anderen „entsprechen“. Man sieht, daß so gleichzeitig jede Zeile und jede Kolonne die

a	b	b	a
b	a	a	b
b	a	a	b
a	b	b	a

Fig. 18.

Hälfte ihrer Zahlen mit der entsprechenden umtauscht und daß bei dieser Vertauschung die Diagonalen stets ihre Zahlen behalten.

2) n ist nicht durch 4 teilbar, also $= 2(2m + 1)$. Man teile das Quadrat in 4 Teile, von denen jeder also $(2m + 1)^2$ Zellen besitzt. Dann wähle man in dem ersten Quadranten (oben links) in jeder Zeile m Zahlen aus, etwa die der Zellen $1 \dots m$ in der obersten Zeile, die der Zellen $2 \dots m + 1$ in der zweiten ..., die der Zellen $m + 1, m + 2 \dots 2m$ in der $(m + 1)$ -ten, die der Zellen $m + 2, m + 3 \dots 2m + 1$ in der $(m + 2)$ -ten, die der Zellen $m + 3, m + 4 \dots 2m + 1$ und 1 in der $(m + 3)$ -ten und schließlich die der Zellen $2m + 1, 1 \dots m - 1$ in der $(2m + 1)$ -ten Zeile und in den anderen 3 Quadranten diejenigen Zahlen, welche den ersteren bzw. den Kolonnen oder Zeilen nach entsprechen resp. ihnen gerade gegenüberliegen, d. h. zu einer Zahl, welche auf dem Feld a, b — in der bekannten Vandermonde'schen Notation (s. Kap. XI, § 1) — steht, die weiteren 3 Zahlen der Felder $n + 1 - a, b$; $a, n + 1 - b$; $n + 1 - a, n + 1 - b$. Dann vertausche man von diesen so auserwählten Zahlen immer je 2 gegenüberliegende; dadurch tauscht jede Zeile mit ihrer entsprechenden $2m$ Zahlen aus und ebenso jede Kolonne. Nun soll aber jede Zeile bzw. Kolonne $2m + 1$ Zahlen mit der entsprechenden austauschen; es bleibt also noch übrig, je eine Vertauschung in 2 ent-

sprechenden Zeilen und Kolonnen vorzunehmen. Zu dem Zweck brauchen wir nur von dem ersten Quadranten die $(2m + 1)$ -te Zahl der obersten Zeile, die erste der zweiten, die zweite der dritten . . . die $2m$ -te Zahl der $(2m + 1)$ -ten Zeile auszuwählen und diese gegen die entsprechenden Zahlen der entsprechenden Zeilen in dem ganzen Quadrat auszutauschen und weiter, um auch bezüglich der Kolonnen unser Ziel zu erreichen, nur in dem ersten Quadranten die $2m$ -te Zahl der obersten Zeile, die $(2m + 1)$ -te Zahl der zweiten, die erste der

<u>1*</u>	2*	3	4	<u>5</u>	6	7	8	9*	10*
<u>11</u>	12*	13*	14	15	16	17	18*	19*	20
21	<u>22</u>	23*	24*	25	26	27*	28*	29	30
31	32	<u>33</u>	34*	35*	36*	37*	38	39	40
41*	42	43	<u>44</u>	45*	46*	47	48	49	50*
51*	52	53	<u>54</u>	55*	56*	57	58	59	60*
61	62	<u>63</u>	64*	65*	66*	67*	68	69	70
71	<u>72</u>	73*	74*	75	76	77*	78*	79	80
<u>81</u>	82*	83*	84	85	86	87	88*	89*	90
91*	92*	93	94	<u>95</u>	96	97	98	99*	100*

Fig. 19.

dritten . . ., die $2m$ -te der $(2m + 1)$ -ten Zeile auszuwählen und mit den entsprechenden Zahlen der entsprechenden Kolonnen des ganzen Quadrats zu vertauschen. Bei allen diesen Umstellungen behalten die beiden Hauptdiagonalen, was wesentlich ist, alle ihre ursprünglichen Zahlen. Wir geben beispielsweise für den Fall $n = 10$ in Fig. 19 zunächst die ursprüngliche Ordnung und kennzeichnen dabei die mit der gegenüberliegenden Zahl zu vertauschenden Zahlen durch einen * und die mit der entsprechenden Zahl der entsprechenden Zeile bzw. Kolonne zu vertauschenden durch einen horizontalen bzw. ver-

tikalen Strich. Fig. 20 gibt alsdann das hieraus resultierende magische Quadrat.

100	89	3	7	95	6	4	8	92	91
81	80	88	14	16	15	17	83	82	20
30	72	78	77	25	26	74	73	29	21
31	39	63	61	66	65	64	38	32	40
60	42	49	54	56	55	47	43	48	51
50	52	53	44	46	46	57	58	59	41
61	62	33	37	36	35	34	68	69	70
71	22	28	27	76	78	24	23	79	80
11	19	18	84	85	86	87	13	12	90
10	9	93	94	5	96	97	98	2	1

Fig. 20.

Es mag noch kurz erwähnt werden, daß die oben (§ 3) für ungeradzellige Quadrate ausführlich besprochene Methode der Komposition eines magischen Quadrats aus einem Einer- und einem n -er-Quadrat auch bei geradzelligen Quadraten angewandt werden kann, jedoch beschränken wir uns hier auf ein Beispiel¹⁾ $n = 6$. Fig. 21^a zeigt das Einer-Quadrat, in dem die

1	5	4	3	2	6
6	2	4	3	5	1
6	5	3	4	2	1
1	5	3	4	2	6
6	2	3	4	5	1
1	2	4	3	5	6

Fig. 21 a.

0	30	30	0	30	0
24	6	24	24	6	6
18	18	12	12	12	18
12	12	18	18	18	12
6	24	6	6	24	24
30	0	0	30	0	30

Fig. 21 b.

1	35	34	3	32	6
30	8	28	27	11	7
24	23	15	16	14	19
13	17	21	22	20	18
12	26	9	10	25	25
31	2	4	33	5	36

Fig. 21 c.

Zahlen 1—6 in die beiden Diagonalen in natürlicher Reihenfolge, beide Male vom linken Rand beginnend, eingetragen sind;

¹⁾ s. Labosne, Bachet-Ausgabe 1879, p. 102.

jede Kolonne weist je 2 sich zu 7 ergänzende Zahlen und zwar jede dreimal auf, jedé Zeile dagegen alle 6 Einer. Das Quadrat der „Sechser“ ist ganz entsprechend gebildet, wobei den Zahlen 1, 2 . . . 6 des Einerquadrats jetzt 0, 6 . . . 30 entsprechen, und dann an der Diagonale \searrow gespiegelt (s. Fig. 21^b). Fig. 21^c giebt sodann das fertige magische Quadrat.

§ 6. Stifel'sche Quadrate.

Zum Schluß besprechen wir noch eine sowohl durch Eleganz wie Originalität ausgezeichnete Methode, welche von dem Pastor einer kleinen Gemeinde in der Nähe von Wittenberg, Michael Stifel († 1567), herrührt.¹⁾ Ein solches „Stifel'sches Quadrat“, wie wir kurz sagen wollen, von n^2 Feldern entsteht aus einem schon fertigen magischen Quadrat von $(n - 2)^2$ Feldern, indem dieses allseitig mit einem Rand von Einfelderbreite umgeben, „umrändert“ wird; letzteres entsteht natürlich wieder durch Umränderung eines Quadrats von $(n - 4)^2$ Feldern u. s. w. Durch Umränderung eines $(n - 2)^2$ -feldrigen Quadrates kommen offenbar $4(n - 1)$ neue Felder hinzu. Diese neuen Felder werden mit den $2(n - 1)$ kleinsten und den $2(n - 1)$ größten Zahlen aus der Reihe der n^2 Zahlen ausgefüllt, also mit

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & 2(n - 1) \\ n^2 & n^2 - 1 & \dots & n^2 - 2(n - 1) + 1 \end{array}$$

oder, wie wir offenbar auch schreiben können, mit:

$$(I) \quad \begin{array}{ccc} 1 & 2 & \dots 2(n - 1) \\ A + 2(n - 1) & A + 2n - 3 & \dots A + 1, \end{array}$$

1) *Arithmetica integra*. Cum praefatione Philippi Melancthonis. Nürnberg 1544. fol. 24—29. Stifel kennt den Gebrauch von Buchstaben-größen noch nicht und setzt seine Methode daher an bestimmten Zahlen auseinander; es war daher sehr angebracht, daß Herr Fontès („Sur les carrés à bordure de Stifel“. Assoc. franç. Congrès de Bordeaux XXIV, 1895, t. II, p. 248—256) wenigstens für den Fall des ungeraden n eine getreue Darstellung der Stifel'schen Methode in allgemeiner Form und in arithmetischer Begründung gab. An diese Arbeit lehnt sich unsere obige Darstellung an.

wo $A = n^2 - 2(n - 1)$ ist und je zwei untereinander stehende Zahlen stets dieselbe Summe ergeben, weshalb wir die eine die „Supplementzahl“ der anderen fortan nennen wollen. Für das innere Quadrat der $(n - 2)^2$ Felder bleiben dann die mittleren Zahlen; die Anordnung derselben ergibt sich aus einem Stifel'schen Quadrat von $(n - 2)^2$ Feldern, indem wir hierin einfach jede der Zahlen $1 \dots (n - 2)^2$ um $2(n - 1)$ größer machen, da wir ja eben die Zahlen $1 \dots 2(n - 1)$ für die Umränderung verwenden wollen; daß durch diese Veränderung die magischen Eigenschaften, d. h. die Summengleichheit in den verschiedenen Reihen, in keiner Weise beeinträchtigt werden, liegt auf der Hand, und unsere Aufgabe wird nunmehr nur noch in einer richtigen Verteilung der Zahlen

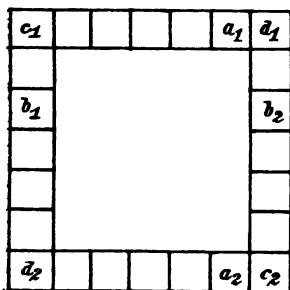


Fig. 22.

auf die Felder der Umränderung bestehen. Durch die Umränderung erhält jede der ursprünglichen Zeilen, Kolonnen und Diagonalen je zwei neue Felder, und die Erhaltung der magischen Eigenschaften bedingt offenbar, daß die Summe der Zahlen je zweier in diesem Sinne zusammengehöriger Felder, wie a_1, a_2 oder b_1, b_2 oder c_1, c_2 (s. Fig. 22), stets dieselbe ist.

Wir erreichen dies am einfachsten dadurch, daß wir in zwei in dieser Hinsicht zusammengehörige Felder immer ein Paar von in (I) übereinander stehenden Zahlen, also zwei „Supplementzahlen“ setzen. Wir erhalten dann für die beiden Diagonalen, sowie alle inneren Zeilen und Kolonnen die konstante Summe

$$\frac{1 + (n-2)^2}{2} \cdot (n-2) + 2(n-1)(n-2) + n^2 + 1 = n \frac{(n^2 + 1)}{2},$$

wie es der Fall sein soll. Nach dieser paarweisen Zuordnung der zu placierenden $4(n - 1)$ Zahlen handelt es sich nur noch um das Placement von $2(n - 1)$, etwa der kleinsten Zahlen; damit ist dann das der übrigen auch gegeben, und wir haben

nunmehr nur noch darauf Obacht zu geben, daß sich auch für die beiden äußeren Zeilen und Kolonnen die konstante Summe $\frac{n(n^2+1)}{2}$ ergibt.

Für die weitere Fortsetzung unterscheiden wir nun 3 Fälle:

1) n ist ungerade $= 2m + 1$. Zwei Supplementzahlen sind dann entweder beide gerade oder beide ungerade. Die Summe $\frac{n(n^2+1)}{2}$ ist offenbar ungerade, es muß daher auf jeder Seite des Randes eine ungerade Anzahl ungerader Zahlen stehen; man verfährt also etwa folgendermaßen: In die Ecken setze man gerade Zahlen und im übrigen in die Horizontalreihen ungerade Zahlen; dadurch werden $2(n-2)$ ungerade Zahlen verbraucht, das noch übrige Paar ungerader Zahlen setze man dann in die Vertikalreihen, welche im übrigen mit den geraden Zahlen ausgefüllt werden. Selbstverständlich dürfen wir nun nicht die $n-2$ kleinsten ungeraden Zahlen in die eine Zeile und die größten in die andere setzen, sondern wir werden die Zahlen beider Serien wieder in 2 Teile teilen, nämlich

(II)

$$\begin{array}{c} 1, \quad 3 \quad \dots \quad n-2 \quad | \quad n+2, \quad n+4 \quad \dots \quad 2n-3 \\ A+2(n-1), A+2(n-2) \dots A+n+1 \quad | \quad A+n-3, A+n-5 \dots A+2. \end{array}$$

Dabei stehen je zwei Supplementzahlen auch wieder, wie in (I), übereinander; die Zahlen n und $A+n-1$ haben wir fortgelassen, um sie für die Vertikalreihen zu reservieren. Nehmen wir nun für die unterste Zeile des Quadrats den linken Teil der oberen Reihe von (II) $(1, 3 \dots n-2)$ und den rechten Teil der unteren $(A+n-3, \dots A+2)$, so ist die Summe aller dieser Zahlen offenbar

$$= \sum_1^{n-2} i + \frac{n-3}{2} \cdot A$$

und die zugehörigen Supplementzahlen, die also in die oberste Zeile des Quadrats kommen würden, geben als Summe

$$\sum_{n+1}^{2n-2} i + \frac{n-1}{2} \cdot A.$$

Der Unterschied beider Summen ist, wie sofort ersichtlich, $A + n(n - 2)$, und diese Differenz muß also durch die Eckzahlen wieder paralysiert werden. Nennen wir nun die beiden in die oberen Ecken des Quadrats zu setzenden geraden Zahlen x und y (x rechts, y links), so daß also unten rechts $A + 2n - 1 - y$ und unten links $A + 2n - 1 - x$ stehen würde, so müßte also

$$2A + 2(2n - 1) - x - y = x + y + n(n - 2) + A$$

oder

$$x + y = \frac{A}{2} + 2n - 1 - \frac{n(n - 2)}{2} = 2n$$

sein. Wir wählen also x etwa $= 2$ und $y = 2n - 2$; dann genügen die Zeilen jedenfalls der an sie zu stellenden Forderung.

Die noch unplacierten geraden Zahlen teilen wir gleichfalls in 2 Teile, nämlich

$$(III)$$

4,	6	...	$n - 1$		$n + 1,$	$n + 3$...	$2n - 4$
$A + 2n - 5,$	$A + 2n - 7$...	$A + n$		$A + n - 2,$	$A + n - 4$...	$A + 3.$

Setzen wir die Zahlen des linken Teils der oberen und des rechten Teils der unteren Hälfte von (III) in die rechte Kolonne unserer Quadratummänderung, so ergeben dieselben mit den beiden Eckzahlen 2 und $A + 1$ zusammen die Summe

$$\sum_1^{n-1} i + A \cdot \frac{n-1}{2}$$

und die Summe der anderen geraden Zahlen ist (inkl. der Eckzahlen $2n - 2$ und $A + 2n - 3$)

$$\sum_1^{n-2} i + n \cdot (n - 1) + A \cdot \frac{n-1}{2}.$$

Die letzte Summe ist um $n(n - 1) - (n - 1) = (n - 1)^2$ größer. Diese Differenz wird aber gerade wieder kompensiert, wenn wir in die rechte Kolonne als ungerade Zahl die Zahl $A + n - 1$ und in die linke n setzen, weil

$$A + n - 1 - n = (n - 1)^2 \text{ ist.}$$

Damit ist genügend gezeigt, wie für ungerades n stets ein Stifel'sches Quadrat gebildet werden kann; soweit noch

Willkürlichkeiten bestehen, wird man die Zahlen möglichst nach ihrer GröÙe in die Felder einordnen und so z. B. für $n = 9$ folgendes, von Stifel angegebene Quadrat¹⁾ bilden:

10	81	79	77	75	11	13	15	2
78	28	65	63	61	25	27	18	4
76	62	36	53	51	35	30	20	6
74	60	50	40	45	38	32	22	8
9	23	33	39	41	43	49	59	73
10	24	34	44	37	42	48	58	72
12	26	52	29	31	47	46	57	70
14	64	17	19	21	57	55	54	68
80	1	3	5	7	21	69	67	66

Fig. 23.

2) n ist gerad-gerade, $= 4m$. Es sei zunächst gestattet, eine allgemeinere Bemerkung voranzuschicken: Werden die 4 Reihen der Umränderung in nicht mißzuverstehender Weise nach den vier Himmelsrichtungen unterschieden und sind N_a, N_b, N_c, N_d 4 Zahlen des nördlichen und S_a, S_b, S_c, S_d die entsprechenden Supplementzahlen des südlichen Randes, so wird offenbar allen Bedingungen unseres Problems genügt, wenn alle Zellen zu je 4 („Quadrupeln“) zusammengefaßt und die Zahlen so in die Zellen dieser Quadrupel eingeordnet werden, daß z. B. die Zahlen N_a und N_b zusammen dieselbe Summe ergeben wie S_c und S_d zusammen. Denn wenn $N_a + N_b = S_c + S_d$ ist, so ist offenbar auch $S_a + S_b = N_c + N_d$, also

$$N_a + N_b + N_c + N_d = S_a + S_b + S_c + S_d = 2(n^2 + 1),$$

und sowohl der nördliche, wie der südliche Rand ergibt dann diese Summe $2(n^2 + 1)$ ebenso oft, wie solche Quadrupel vorhanden sind, d. h. m -mal. $2m(n^2 + 1)$ ist aber gerade die verlangte Summe.

1) l. c. fol. 25.

Eine solche Anordnung ist nun leicht folgendermaßen möglich: Man setze in eine Ecke, etwa oben links, die Zahl $2m$ und in eine benachbarte, etwa oben rechts, $2m + 1$; ferner kommt $n + 1$ in eine Zelle des östlichen und $n + 2$ in eine des westlichen Randes. Sodann fassen wir von den Zahlen $1, 2 \dots n$ immer je zwei so zusammen, daß alle $2m$ Paare gleichsummig sind, also 1 und n , 2 und $n - 1$ u. s. w. Von diesen $2m$ Paaren setzen wir m auf den nördlichen — und zwar unter diesen das schon für die Ecken designierte Paar $2m, 2m + 1$ — und die anderen m auf den südlichen Rand, womit diese beiden Ränder offenbar in der geforderten Weise ausgefüllt sind, wenn die zugehörigen Supplementzahlen, wie ja selbstverständlich, gleichfalls eingetragen sind. Dann sind noch die Zahlen $n + 3, n + 4 \dots 2(n - 1)$ mit ihren Supplementzahlen unplaciert; wir fassen auch sie wieder zu gleichsummigen Paaren zusammen, also $n + 3$ und $2(n - 1)$, $n + 4$ und $2n - 3$ u. s. w. und setzen von diesen $2m - 2$ Paaren die Hälfte, also $m - 1$ Paare, auf den östlichen und die andere Hälfte auf den westlichen Rand. Beide Ränder sind nach Eintragung dieser Zahlen und der zugehörigen Supplementzahlen ausgefüllt, da die 4 Ecken schon besetzt waren und außerdem von jedem Rand noch 2 Zellen, nämlich bezw. durch $n + 1$ und $n + 2$ mit deren Supplementzahlen. Bedenkt man nun, daß nicht nur die $2m - 2$ Paare von Zahlen gleichsummig waren, sondern auch

$$2m + (n + 2) = (2m + 1) + (n + 1)$$

ist, so erkennt man, daß auch der westliche und der östliche Rand die gestellte Bedingung erfüllen.

3) n ist ungerad-gerade, $= 4m + 2$. Eine Zusammenfassung aller Zellen zu je 4, wie vorher, ist hier zunächst unmöglich; immerhin gelingt es leicht, diesen Fall auf den vorigen zurückzuführen. Zu dem Zwecke setzen wir in die *N-W*-Ecke die 1 und in die *N-O*-Ecke 6, ferner in eine Zelle des *N*-Randes 5, auf den *W*-Rand 8 und 10, den *O*-Rand 4 und 9 und den *S*-Rand 2, 3, 7. Damit sind die Zahlen 1—10 placiert und zwar, um dies zu rekapitulieren, in folgender Weise:

1 . . . 5 6
 8
 10
 4
 9

 . 2 3 7

Dazu kommen dann noch die betreffenden Supplementzahlen und, wenn wir bedenken, daß $1 + 5 + 6 = 2 + 3 + 7$ und $1 + 8 + 10 = 6 + 4 + 9$ ist, so erkennen wir, daß nach Eintragung der Supplementzahlen jeder der 4 Ränder in seinen 6 Zahlen die Summe $3(n^2 + 1)$ aufweist. Wir brauchen da-

1	39	38	34	5	11	18	85	88	6
8	22	82	75	81	76	81	24	23	33
10	74	33	87	68	62	37	38	29	31
35	28	65	43	57	36	46	36	73	4
32	72	60	54	48	48	51	41	23	9
89	69	40	50	62	53	47	61	32	12
84	30	42	55	45	44	58	59	71	17
15	31	63	34	35	39	84	68	70	86
14	78	19	26	20	25	80	77	79	87
95	2	3	7	36	30	83	16	13	100

Fig. 24.

her dann nur noch die noch freien $(4m + 2) - 6 = 4m - 4$ Zellen jeder Reihe in der im vorigen Fall besprochenen Weise zu je 4 zusammenzufassen und zu besetzen, um ein magisches Quadrat zu erhalten.¹⁾ — Zur Illustration dieser Methode diene der Fall $n = 10$ der Fig. 24.

1) Eine andere Methode zur Bildung geradzelliger Quadrate durch

§ 7. Zusätze.

Wenn es auch, wie schon oben bemerkt, nicht in unserer Absicht liegt, alle Erscheinungen der umfangreichen Litteratur über magische Quadrate zu berücksichtigen, so mag doch in diesem § noch auf verschiedene Untersuchungsrichtungen kurz aufmerksam gemacht werden.

Während Stifel die magischen Quadrate aus einem Kernquadrat durch Umränderungen hervorgehen läßt, bildet Thompson¹⁾ sie durch Zusammensetzung von unter sich gleichen Teilquadraten. Hat man nämlich bereits je ein magisches Quadrat von n^2 bzw. p^2 Zellen gebildet, so ergibt sich hieraus durch Zusammensetzung leicht eins von $(pn)^2$ Zellen; das Prinzip dieser Methode wird uns im folgenden Kapitel, S. 251 wieder begegnen.

Außer magischen Quadraten sind zahlreiche andere magische Gebilde behandelt worden, so Rechtecke²⁾, Polygone³⁾, Kreise⁴⁾, Cylindermantelflächen⁵⁾, Kreuze⁶⁾ u. s. w.; auch bei zweidimensionalen Gebilden ist man nicht stehen geblieben, sondern hat magische Kuben^{2) 6) 7) 8)} und Parallelepipeda⁹⁾ gebildet.

Umränderungen eines 16-zelligen Kernquadrats ist von Frenicle de Bessy (l. c. p. 442) entwickelt worden; man vergleiche hierzu auch Drach, „An easy general rule for filling up all magic squares“. *Messenger of Mathem.* (2) II, 1873, p. 169—174, 187.

1) Thompson „On Magic Squares“. *Quart. Journ. of Mathem.* X, 1869, p. 186—202.

2) Harmuth, *Archiv d. Math. u. Phys.* Bd. 66, 1881.

3) Scheffler, *Die magischen Figuren.* Leipzig 1882, p. 47 ff.

4) Franclin, *Experiments and observations on electricity.* London 1769, p. 354.

5) von Pefsl „Über eine besondere Art magischer Quadrate“. *Progr. Amberg* 1873.

6) Sauveur, *Mém. de l'Acad. des Sc. de Paris* 1710.

7) Moon, „On the theory of magic squares, cubes“ etc. *Cambr. and Dubl. Math. J.* I, 1846, 160—164.

8) Hugel, *Das Problem der magischen Systeme.* Neustadt a. d. Haardt 1876.

9) Harmuth, *Archiv d. Math. u. Phys.* Bd. 67, 1882, p. 238—253; vgl. a. v. dems. „Über polydimensionale Zahlenfiguren“. *Archiv d. Math. u. Phys.* Bd. 69, 1883.

Der englische Missionar Frost¹⁾ verallgemeinerte die magischen Quadrate und Kuben insofern, als er die Forderung konstanter Summe nicht gerade auf die Zeilen, Kolonnen und Diagonalen richtete, sondern auf je n Zellen, deren gegenseitige Lage nach einem einfachen Gesetz definiert ist. Frost nannte diese Gebilde nach seinem indischen Wohnort „Nasik squares“ resp. „cubes“. Kommt eine solche Eigenschaft zu den gewöhnlichen der magischen Quadrate noch hinzu, so sprechen manche Autoren von „hypermagischen“ Quadraten.

Statt der Forderung konstanter Summen in den Zeilen u. s. w. ist auch die konstanter Produkte²⁾ erhoben, auch auf subtraktiven Eigenschaften beruhende Quadrate sind angegeben worden.³⁾

Mehrere Arbeiten des Herrn Coccoz⁴⁾ beschäftigen sich mit magischen Quadraten, welche so beschaffen sind, dafs, wenn man die Zahlen alle durch ihre Quadrate ersetzt, wieder ein magisches Quadrat entsteht.

Eine besondere Art magischer Quadrate, welche dieselben Eigenschaften besitzen wie die Transformationsdeterminante eines orthogonalen Koordinatensystems in Bezug auf ein anderes, nämlich dafs die Quadratsummen aller Glieder einer beliebigen Zeile oder Kolonne einen konstanten, von 0 verschiedenen Wert ergeben, dagegen die Summen der Produkte entsprechender Glieder von 2 Zeilen resp. Kolonnen = 0 sind, studierte Euler.⁵⁾

1) Frost, Quart. J. of Mathem. VII, 1866, p. 92—102, s. a. v. dems. Quart. J. VIII, 1867, p. 74; XV, 1878, p. 34—49; 93—123; 366—368.

2) Stifel l. c. fol. 29.

3) Kochanski, Acta erudit. 1686, p. 393.

4) Coccoz, Comptes rendus de l'association française pour l'avanc. des sc. Congrès de Pau XXI, 1892; Besançon XXII, 1893; Caen XXIII, 1894; Bordeaux XXIV, 1895 (nähere Angabe s. im litter. Index). Vgl. auch M. Frolov, Égalités à deux degrés. Bull. de la soc. mathém. de France t. XVII, 1889, p. 69—83.

5) Euler, Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile. Comment. arithm. collect. 1849, Bd. I, p. 427—443.

Kapitel XIII.

Euler'sche Quadrate.

Je laisse aux géomètres à voir s'il y a des moyens pour achever l'énumération de tous les cas possibles, ce qui paraît fournir un vaste champ pour des recherches nouvelles et intéressantes.

EULER. Comm. arithm. coll. II, p. 361.

§ 1. Das Problem der 36 Offiziere.

Eine Frage, welche nach Euler's¹⁾ Zeugnis lange den Scharfsinn vieler Menschen beschäftigt hat, ist die, *36 Offiziere, welche 6 verschiedenen Regimentern und 6 verschiedenen Chargen angehören, so zwar, daß jedes Regiment durch jede Charge einmal vertreten ist, so aufzustellen in Reihen von je 6, daß Offiziere gleicher Charge oder gleichen Regiments weder in derselben Horizontal- noch derselben Verticalreihe vorkommen.* Euler erklärt dies Problem für unmöglich, „so schwer es auch sei, einen strengen Beweis hierfür zu geben“. Nehmen wir jedoch statt der 36 nur 16 Offiziere von 4 verschiedenen Regimentern und 4 verschiedenen Chargen an und bezeichnen jeden derselben durch 2 Ziffern, von denen die erste die Nummer des Regiments, die zweite die Charge andeutet, so erhalten wir leicht folgende Lösung:

1) „Recherches sur une nouvelle espèce de carrés magiques“ Verhandelingen van het Genootschap te Vlissingen 1782, IX, p. 85—239 = Comment. arithm. coll. Bd. II, p. 302—361.

1, 1 2, 2 3, 3 4, 4
 4, 3 3, 4 2, 1 1, 2
 3, 2 4, 1 1, 4 2, 3
 2, 4 1, 3 4, 2 3, 1.

Die hiermit gelöste Aufgabe findet sich bei Bachet¹⁾ in folgender Form ausgesprochen: *Die Asse, Könige, Damen und Buben eines Kartenspiels sollen so in 4 Reihen zu je 4 angeordnet werden, daß in derselben Horizontal- oder Vertikalreihe weder 2 Karten desselben Ranges noch derselben Farbe liegen.*

Es entsteht die Frage, wann allgemein solche Anordnungen von n^2 Elementen möglich sind. Des besseren Verständnisses halber sprechen wir die Aufgabe nochmals in einer von dem Astronomen Schumacher²⁾ gegebenen Formulierung aus: „Man schreibt A auf n Zettel und bei A die natürlichen Zahlen 1 bis n , ebenso auf n Zettel B und die natürlichen Zahlen von 1 bis n und so fort, bis man n Buchstaben hat. Aus diesen n^2 Zetteln soll ein Quadrat gelegt werden mit der Bedingung, daß sowohl in jeder horizontalen, als vertikalen Reihe alle Buchstaben und alle Zahlen vorkommen.“

Schumacher fährt dann fort: „Für $n = 2$ ist dies unmöglich, für $n = 3$ leicht.“ Für $n = 4$ haben wir oben schon eine Lösung gegeben. Allgemein giebt es jedenfalls dann stets eine Lösung, wenn sich zu n zwei Zahlen p und q so bestimmen lassen, daß p , q und $p - q$ zu n relativ prim und ≥ 1 sind. Die dann anwendbare Methode wollen wir an dem Beispiel $n = 5$ auseinandersetzen. Wir nehmen an: $q = 1$ und können nun $p = 2, 3, 4$ setzen; wählen wir etwa $p = 3$. Alsdann schreiben wir die Zahlen 1 bis n in beliebiger Ordnung hin und darunter eine cyklische Permutation derselben, indem wir alle Zahlen um q , d. h. also hier um *eine* Stelle nach links rücken und die erste dann

1) l. c. 4^{ième} ed. p. 200.

2) Briefwechsel Gauß-Schumacher Bd. IV, p. 61.

wieder hinten ansetzen, und darunter wieder die entsprechende Vertauschung der zweiten Anordnung u. s. f., bis wir n Reihen haben. In unserem Falle erhalten wir so:

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4.

Diese Ziffern sollen im Sinne unserer ursprünglichen Aufgabe die verschiedenen Regimenter angeben, und man sieht, daß in derselben Zeile oder Kolonne niemals dieselbe Zahl zweimal vorkommen kann, weil q zu n relativ prim ist und der Cyklus sich daher erst nach n Reihen schließt. Ebenso schreiben wir die n Buchstaben A, B, C, D, E in eine Reihe und nehmen nun immer cyklische Vertauschungen um je $p = 3$ Stellen und zwar gleichfalls nach links vor; wir erhalten so:

A	B	C	D	E
D	E	A	B	C
B	C	D	E	A
E	A	B	C	D
C	D	E	A	B .

Da auch p zu n relativ prim ist, so kommt auch hier ein Buchstabe, der jetzt das Symbol der Charge ist, in jeder Zeile oder Kolonne nur je einmal vor. Kombinieren wir nun aus den beiden Schemata immer je eine Zahl mit dem entsprechenden Buchstaben, so erhalten wir schließlich die verlangte Anordnung:

$A1$	$B2$	$C3$	$D4$	$E5$
$D2$	$E3$	$A4$	$B5$	$C1$
$B3$	$C4$	$D5$	$E1$	$A2$
$E4$	$A5$	$B1$	$C2$	$D3$
$C5$	$D1$	$E2$	$A3$	$B4$.

Da auch $p - q$ relativ prim zu n ist, so ist offenbar je ein Buchstabe und je eine Zahl gerade einmal kombiniert, wie es sein muß.

Nach dieser Methode erledigen sich offenbar alle Fälle eines ungeraden n , da $q = 1$, $p = 2$ hier stets Zahlen von den verlangten Eigenschaften sind (vgl. Kap. XII, § 3).

Für $n = 6$ erklärte schon Euler, wie oben bemerkt, die Aufgabe für unlösbar, und Clausen, der Assistent Schumacher's, hatte angeblich einen Beweis hierfür¹⁾ und vermutete die Unlösbarkeit für jede Zahl $n = 4i + 2$. Allerdings sind für $n = 6$ zwei Zahlen p und q von den verlangten Eigenschaften nicht zu finden, andererseits ist aber auch jene Bedingung nur hinreichend, keineswegs aber notwendig für eine Lösung.

Das letztere folgt schon daraus, daß für $n = 2^m$, wo jene Bedingung nicht erfüllbar ist, für $m > 1$ stets eine Lösung existiert, wie wir weiterhin sehen werden; als Beispiel geben wir eine solche für $n = 8$, wobei wir statt der Buchstaben auch Ziffern anwenden:

1, 1	2, 2	3, 3	4, 4	5, 5	6, 6	7, 7	8, 8
8, 7	7, 8	6, 5	5, 6	4, 3	3, 4	2, 1	1, 2
7, 5	8, 6	5, 7	6, 8	3, 1	4, 2	1, 3	2, 4
5, 4	6, 3	7, 2	8, 1	1, 8	2, 7	3, 6	4, 5
4, 6	3, 5	2, 8	1, 7	8, 2	7, 1	6, 4	5, 3
6, 2	5, 1	8, 4	7, 3	2, 6	1, 5	4, 8	3, 7
2, 3	1, 4	4, 1	3, 2	6, 7	5, 8	8, 5	7, 6
3, 8	4, 7	1, 6	2, 5	7, 4	8, 3	5, 2	6, 1.

Besitzt man Lösungen für $n = a$ und $n = b$, so kann man hieraus, wie Herr G. Tarry²⁾ gezeigt hat, leicht Lösungen für $n = a \cdot b$ konstruieren.³⁾ Es mag dies an dem Fall $a = 3$,

1) Brief Schumacher's an Gauß vom 10. VIII. 1842.

2) Intermédiaire des mathématiciens, t. VI, 1899, p. 251—252.

3) Es ist dies dasselbe Prinzip, das Thompson schon vorher auf magische Quadrate angewandt hatte (s. S. 246).

$b = 4$ veranschaulicht werden. Für $n = 3$ haben wir die Lösung

$$\begin{array}{cccc} 2, & 3 & 1, & 1 & 3, & 2 \\ 3, & 1 & 2, & 2 & 1, & 3 \\ 1, & 2 & 3, & 3 & 2, & 1 \end{array} \quad (\text{I})$$

und für $n = 4$:

$$\begin{array}{cccc} 1, & 1 & 3, & 4 & 4, & 2 & 2, & 3 \\ 4, & 3 & 2, & 2 & 1, & 4 & 3, & 1 \\ 2, & 4 & 4, & 1 & 3, & 3 & 1, & 2 \\ 3, & 2 & 1, & 3 & 2, & 1 & 4, & 4. \end{array}$$

In diesem letzteren Schema wollen wir alle Ziffern um 1 vermindern und erhalten so:

$$\begin{array}{cccc} 0, & 0 & 2, & 3 & 3, & 1 & 1, & 2 \\ 3, & 2 & 1, & 1 & 0, & 3 & 2, & 0 \\ 1, & 3 & 3, & 0 & 2, & 2 & 0, & 1 \\ 2, & 1 & 0, & 2 & 1, & 0 & 3, & 3. \end{array} \quad (\text{II})$$

An die Stelle jeder Kombination i, k in II setzen wir nun je ein Quadrat I, jedoch erhöhen wir dabei alle ersten Ziffern von I um $i \cdot 3$ und alle zweiten um $k \cdot 3$, d. h. also z. B. das an die Stelle von 2, 3 in II tretende 9-gliedrige Quadrat leitet sich aus I her, indem man zu allen ersten Ziffern in I $2 \cdot 3$ und zu allen zweiten $3 \cdot 3$ addiert. Man erhält so folgende Lösung für $n = 12$:

2, 3	1, 1	3, 2	8, 12	7, 10	9, 11	11, 6	10, 4	12, 5	5, 9	4, 7	6, 8
3, 1	2, 2	1, 3	9, 10	8, 11	7, 12	12, 4	11, 5	10, 6	6, 7	5, 8	4, 9
1, 2	3, 3	2, 1	7, 11	9, 12	8, 10	10, 5	12, 6	11, 4	4, 8	6, 9	5, 7
11, 9	10, 7	12, 8	5, 6	4, 4	6, 5	2, 12	1, 10	3, 11	8, 3	7, 1	9, 2
12, 7	11, 8	10, 9	6, 4	5, 5	4, 6	3, 10	2, 11	1, 12	9, 1	8, 2	7, 3
10, 8	12, 9	11, 7	4, 5	6, 6	5, 4	1, 11	3, 12	2, 10	7, 2	9, 3	8, 1
5, 12	4, 10	6, 11	11, 3	10, 1	12, 2	8, 9	7, 7	9, 8	2, 6	1, 4	3, 5
6, 10	5, 11	4, 12	12, 1	11, 2	10, 3	9, 7	8, 8	7, 9	3, 4	2, 5	1, 6
4, 11	6, 12	5, 10	10, 2	12, 3	11, 1	7, 8	9, 9	8, 7	1, 5	3, 6	2, 4
8, 6	7, 4	9, 5	2, 9	1, 7	3, 8	5, 3	4, 1	6, 2	11, 12	10, 10	12, 11
9, 4	8, 5	7, 6	3, 7	2, 8	1, 9	6, 1	5, 2	4, 3	12, 10	11, 11	10, 12
7, 5	9, 6	8, 4	1, 8	3, 9	2, 7	4, 2	6, 3	5, 1	10, 11	12, 12	11, 10

Man erkennt ohne weiteres, daß sowohl die ersten, wie auch die zweiten Ziffern derselben Zeile oder Kolonne alle verschieden sind und daß je eine erste und je eine zweite Ziffer immer nur einmal mit einander kombiniert sind; hätten wir nämlich zweimal dieselbe Kombination, so könnten die beiden, da ihre Ziffern dann ja dieselbe Kombination von Resten nach 3 ergeben würden, offenbar nur an korrespondierenden Stellen der neunfeldrigen Quadrate stehen; je 16 solche korrespondierende Kombinationen sind aber alle unter einander verschieden, weil es die Kombinationen von II alle sind.

Hieraus folgt nun mit Rücksicht auf die für ungerades n , sowie für $n = 4$ und 8 oben gegebenen Lösungen, daß es nicht nur für jedes ungerade, sondern auch für jedes geradgerade n Quadrate der verlangten Art giebt, während der Nachweis für die Unmöglichkeit derselben bei ungerad-geradem n noch aussteht.¹⁾

Statt unserer Buchstaben und Ziffern gebraucht Euler übrigens griechische und lateinische Buchstaben und stellt nun zunächst eine passende Anordnung der lateinischen Buchstaben, ein „lateinisches Quadrat“²⁾, her, eine Bezeichnung, die sich seitdem für derartige Anordnungen eingebürgert hat.

§ 2. Gauß'sche Quadrate.

Die im vorigen § behandelten und zuerst von Euler eingehend studierten Anordnungen nennen wir „Euler'sche Quadrate.“ Gauß hat die weitere Forderung erhoben³⁾, daß auch in keiner der beiden Diagonalreihen sich ein Buchstabe oder

1) Für $n = 6$ ist ein solcher Unmöglichkeitsbeweis (s. S. 251, Anm. 1) jetzt gerade von Herrn G. Tarry gegeben worden in den *Mém. de la Soc. Roy. des Sc. de Liège* (3) t. II, 1900, sowie *Mathesis* (2) X. Juliheft 1900, Supplem. p. 23—30, kurz skizziert im *Intermédiaire des mathématiciens* t. VII, 1900, p. 14—16; ebenda (t. V, p. 83—85) findet man übrigens einige verwandte Anordnungsprobleme.

2) l. c. p. 304.

3) Briefw. Gauß-Schumacher Bd. IV, p. 63.

eine Zahl wiederhole. Dann wird auch der Fall $n = 3$ unlösbar, dagegen giebt es für $n = 4$ folgende zwei Lösungen:

$$\begin{array}{cccc}
 A1 & B2 & C3 & D4 \\
 D3 & C4 & B1 & A2 \\
 B4 & A3 & D2 & C1 \\
 C2 & D1 & A4 & B3
 \end{array}
 \quad \text{und} \quad
 \begin{array}{cccc}
 A1 & B2 & C3 & D4 \\
 C4 & D3 & A2 & B1 \\
 D2 & C1 & B4 & A3 \\
 B3 & A4 & D1 & C2.
 \end{array}$$

Wir können auch hier leicht eine hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit angeben; bestimmen wir nämlich die Zahlen p, q so, daß sie nicht nur den Bedingungen des § 1 genügen, sondern daß auch für p und q die Werte 1 und $n - 1$ ausgeschlossen sind, so erhalten wir sicher Anordnungen im Gauß'schen Sinne, die wir fortan „Gauß'sche Quadrate“ nennen wollen. Wir hätten also in dem Beispiel $n = 5$ des § 1 nur $q = 2$ statt 1 zu setzen gehabt und hätten so das Gauß'sche Quadrat

$$\begin{array}{ccccc}
 A1 & B2 & C3 & D4 & E5 \\
 D3 & E4 & A5 & B1 & C2 \\
 B5 & C1 & D2 & E3 & A4 \\
 E2 & A3 & B4 & C5 & D1 \\
 C4 & D5 & E1 & A2 & B3
 \end{array}$$

erhalten. Die nach dieser Vorschrift hergestellten Quadrate genügen der Gauß'schen Bedingung nicht nur in den 2 Hauptdiagonalen, sondern auch in jeder „gebrochenen Diagonale“¹⁾; man könnte solche Anordnungen passend „pandiagonale Gauß'sche Quadrate“ nennen.²⁾ Aus jedem Gauß'schen Quadrat läßt sich natürlich, indem man die Zahlen als „Einer“ auf faßt und an die Stelle der n Buchstaben die „ n -er“ setzt (s. Kap. XII, S. 219), ein magisches Quadrat herleiten, umgekehrt aber aus letzterem im allgemeinen natürlich keins der ersteren Art, z. B. nicht aus dem in Kap. XII, am Ende des § 3 mitgeteilten; hiervon eine Ausnahme machen die nach den Methoden

1) Wegen dieses Ausdrucks s. Kap. XII, S. 219.

2) Man vergleiche hierzu Kap. XII, S. 230.

des § 4, III und IV in Kap. XII hergestellten magischen Quadrate, aus denen sich für ein durch 3 nicht teilbares n Gauß'sche (sogar pandiagonale) Quadrate herleiten lassen, während im übrigen die magischen Quadrate des betreffenden § nur Euler'sche Quadrate zu liefern imstande sind, was jedoch auch keineswegs immer der Fall ist (s. das schon oben angeführte Beispiel aus Kap. XII, § 3). Aus einem pandiagonalen Gauß'schen Quadrat ergibt sich natürlich stets ein pandiagonales magisches.

Die Gauß'sche Forderung und zwar einschließlic der „gebrochenen Diagonalen“ war übrigens schon von Euler erhoben worden, der fand, daß diese Bedingung für ein durch 2 oder 3 teilbares n unerfüllbar sei.¹⁾ In einem pandiagonalen Gauß'schen Quadrat repräsentieren je n Felder mit gleichem Buchstaben bzw. gleicher Zahl offenbar eine Lösung des in Kap. IX behandelten Königinnenproblems; das für $n = 5$ oben gegebene liefert also 10 solche Lösungen, d. h. alle für den betreffenden Fall überhaupt existierenden (siehe S. 126/127). Es ist daher nicht Zufall, daß sich hier wie dort (s. SS. 128 und 134) ein durch 2 oder 3 teilbares n als Ausnahmefall herausstellte (vgl. auch Kap. XII, § 4, I, III u. IV).

Da diese verschiedenen Anordnungen leicht verwechselt werden können und thatsächlich schon zu Mißverständnissen Anlaß gegeben haben²⁾, so glauben wir gut zu thun, eine nach unseren Begriffen zweckmäßige Terminologie für die wichtigsten hierher gehörigen Gebilde anzureihen:

1. „Magische Quadrate“ im engeren Sinne: Anordnung der Zahlen 1 bis n^2 in n^2 Felder, so daß jede Zeile wie Ko-

1) l. c. p. 322. — Um auf eine Frage des § 1 zurückzukommen, nämlich die noch unbewiesene Unmöglichkeit Euler'scher Quadrate für $n \equiv 2 \pmod{4}$, sei bei dieser Gelegenheit bemerkt, daß „pandiagonale Gauß'sche Quadrate“ für diese Fälle jedenfalls nicht existieren, da auch „pandiagonale magische Quadrate“ (s. Kap. XII, S. 230) in diesen Fällen unmöglich sind (M^cClintock l. c. p. 110).

2) S. hierzu die Zusatznote III, S. 401/402.

lonne und jede der beiden Diagonalen dieselbe konstante Summe ergibt.

2. „Pandiagonale magische“ oder „diabolische“, auch „doppelt-magische“ Quadrate: auch die „gebrochenen Diagonalen“ genügen der Bedingung 1,

3. „Euler'sche Quadrate“: Anordnung von n^2 Elementen $A_1 \dots A_n, B_1 \dots B_n \dots$ in n^2 Felder, so zwar, daß jede Zeile und jede Kolonne jeden Buchstaben und jede Zahl gerade einmal aufweist.

4. „Gauß'sche Quadrate“: Die Bedingung 3 wird auch von den beiden Diagonalen erfüllt.

5. „Pandiagonale Gauß'sche Quadrate“: Die Bedingung 3 wird auch von jeder „gebrochenen Diagonale“ erfüllt.

6. „Lateinische Quadrate“: Anordnung von n Elementen in n^2 Felder, so zwar, daß jedes n -mal und zwar in jeder Zeile wie Kolonne gerade je einmal vorkommt.

Außerdem finden sich in der Litteratur noch zahlreiche andere Bezeichnungen, wie „kabbalistische“, „semi-magische“ (vgl. Kap. XI, § 11, sowie Kap. XII, S. 224) Quadrate, „Nasik squares“ (vgl. Kap. XII, § 7) etc., worauf wir hier nicht näher eingehen.

Kapitel XIV.

Anordnungsprobleme.

The importance of the subject in these later times has been vastly augmented by the magnificent applications which our great mathematical luminary has made of it to the doctrine of invariants.

SYLVESTER. Phil. Magaz. XVI, 1858.

Abschnitt I. Verschiedene Anordnungen.

§ 1. Anordnungen im Kreise.

Aufgabe 1.

Eine Anzahl Kinder tanzen im Kreise herum, indem sich die benachbarten anfassen; wie sind die verschiedenen Anordnungen zu treffen, so daß jedes Kind sich ein- und nur einmal in jedes anderen Nachbarschaft befindet?

Da jedes Kind immer bei jedem Male 2 anderen benachbart ist, so ist die Aufgabe offenbar nur dann lösbar, wenn die Zahl der Kinder eine ungerade ist. Walecki giebt hierfür folgende Lösung¹⁾: Ist die Anzahl der Kinder etwa $2n + 1$, so teile man einen Kreis in $2n$ Teile und verbinde die Teilpunkte und einen auf dem Durchmesser gelegenen $(2n + 1)$ -ten Punkt A in der in Fig. 1 (für das Beispiel $n = 6$) angegebenen Weise. Bei der ersten Anordnung mögen, entsprechend der Reihenfolge des Linienzugs, die Kinder in der Ordnung $ABCDEFGHIJKLMNA$ im Kreis aufgestellt werden. Nun denke man sich — bei festem Kreis und unveränderten Buchstaben

1) Publiziert durch Lucas, Récréat. math. II, p. 162.

an seinem Umfange — den Linienzug, mit dem Punkt A fest darauf, um den Mittelpunkt gedreht, so daß die Linie AB in die Richtung AC kommt, und notiere dann wieder die Buchstaben in der Reihenfolge, wie der Linienzug sie aniebt.

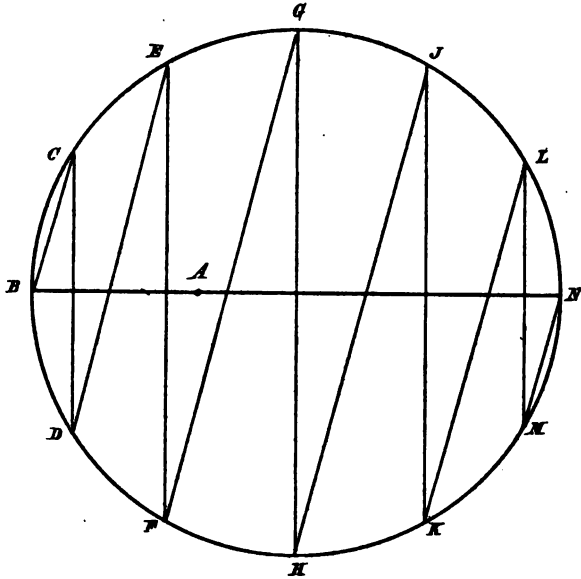


Fig. 1.

Man erhält so als zweite Anordnung $ACEBGDJFLHKNMA$, und so geht dies fort, bis der Durchmesser, auf dem A liegt, wieder in seine Lage zurückgekehrt ist, also bis der ganze Linienzug sich halb im Kreise herumgedreht hat. Man erhält so n verschiedene Anordnungen, in denen jeder Buchstabe gerade einmal jedem anderen benachbart ist, wie man leicht folgendermaßen einsieht: Zunächst ist von A ohne weiteres ersichtlich, daß es in den n Malen stets anderen Punkten benachbart ist, im ganzen also allen $2n$ Punkten je einmal. Die übrigen Linien des Linienzuges außer dem Durchmesser von A zerfallen in 2 Scharen unter sich paralleler Linien; daß die eine Schar durch Drehungen etwa einmal eine Richtung er-

halte, welche die andere vorher oder nachher hat, ist ausgeschlossen, weil die Linien der einen Schar Sehnen sind, deren Bögen aus einer geraden Anzahl von Peripherieteilen bestehen, während die Bögen der Sehnen der anderen Schar eine ungerade Anzahl von Peripherieteilen messen (z. B. ist der Bogen von $ED = \frac{3}{12}$, der von $EF = \frac{4}{12}$ des Kreises).

Die Linien einer Schar können in ihre Richtung aber erst nach Drehung um 180° zurückkehren, mithin müssen in den n Stellungen Linien von $2n$ verschiedenen Richtungen vorkommen, abgesehen von dem Durchmesser von A . Durch jeden Punkt geht aber in jeder Stellung je eine Linie beider Scharen, außer wenn der Punkt auf dem Durchmesser von A liegt, in letzterem Falle nur eine Linie der einen Schar. Es gehen also durch jeden Punkt in allen Stellungen zusammen — von dem Durchmesser durch A abgesehen — Linien von 11 resp. $2n - 1$ verschiedenen Richtungen hindurch; dies heißt aber natürlich, daß jeder Punkt mit allen 11 resp. $2n - 1$ anderen Punkten der Peripherie verbunden ist und zwar mit jedem gerade einmal.

Aufgabe 2.

*Zwischen Knaben und Mädchen, beiden in gleicher Anzahl, soll in kreisförmiger Aufstellung bunte Reihe gemacht werden; wie sind die Anordnungen zu treffen, wenn jeder Knabe jedem Mädchen gerade einmal benachbart sein soll?*¹⁾

Da bei jeder Anordnung jeder Knabe 2 Nachbarinnen hat, so kann der gestellten Forderung nur dann entsprochen werden, wenn Knaben wie Mädchen in gerader Zahl vorhanden sind, sagen wir beispielsweise: zu je 6. Die Mädchen seien durch die Punkte a, b, c, d, e, f des äußeren, die Knaben durch die des inneren Kreises der Fig. 2 dargestellt. Man erhält aus der ersten Stellung $aAbBcCdDeEfFa$ alle

1) s. Lucas, Récréat. II, p. 168.

weiteren gewünschten Stellungen einfach, indem man sich den inneren Kreis gedreht denkt, so zwar, daß jeder Punkt in die Stellung des übernächsten, also A in die von C tritt und beim nächsten Male A in die jetzige von E .

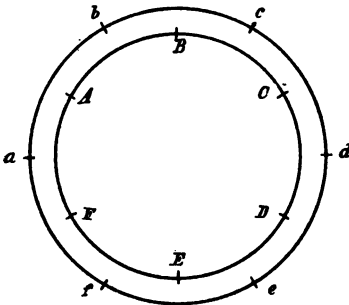


Fig. 2.

Deuten je 2 gleiche Buchstaben ein Ehepaar an und zwar die großen Buchstaben die Männer, die kleinen die Frauen und soll, etwa bei einem Diner, eine bunte Reihe unter der Bedingung formiert

werden, daß niemals 2 Gatten benachbart sind, so entsteht die Frage, auf wieviel Arten dies möglich sei. Bei 2 Ehepaaren giebt es natürlich keine, bei 3 eine und bei 4 folgende 2 Lösungen:

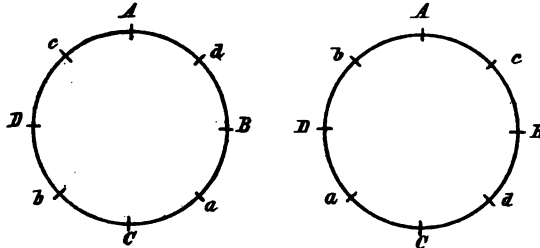


Fig. 3.

Bei 5 Paaren giebt es 13, bei 12 bereits ca. 60 Millionen Lösungen, wie sich aus gewissen Recursionsformeln der Herren Laisant und Moreau ergibt.¹⁾

§ 2. Promenaden zu je zwei und Paarung der Teilnehmer von Schachturnieren.

Ein Pensionat junger Mädchen geht täglich spazieren, je zwei in einer Reihe; wie sind die Anordnungen zu treffen, wenn

1) Lucas, Théorie des nombres t. I, Nr. 123, p. 215 und p. 491—495 (Note III).

der Reihe nach jedes Mädchen gerade einmal mit jedem anderen zusammen gehen soll, bis der Cyklus von neuem beginnt? ¹⁾

Ist die Anzahl der Mädchen eine ungerade, so ist natürlich immer eine überzählig und geht dann neben der Pensionatsvorsteherin; wir zählen daher die letztere in dem Fall einer ungeraden Anzahl mit, so daß wir auf jeden Fall mit einer geraden Anzahl Personen zu thun haben. Ist $2n$ diese Anzahl, so teilen wir nach Walecki ²⁾ einen Kreis in $2n - 1$ Teile, bezeichnen Mittelpunkt und Teilpunkte, wie in Fig. 4 für $n = 6$ angegeben, und ziehen die dort verzeichneten Linien.

Die Anordnung des ersten Tages erhalten wir, indem wir die an den Enden einer Sehne resp. des Radius stehenden Buchstaben kombinieren, also AM, BL, CK, DJ, EH, FG ; die nächste, indem wir bei festen Buchstaben das System der Linien soweit drehen, daß der Radius durch den nächsten Teilpunkt (B) geht und nun wieder kombinieren

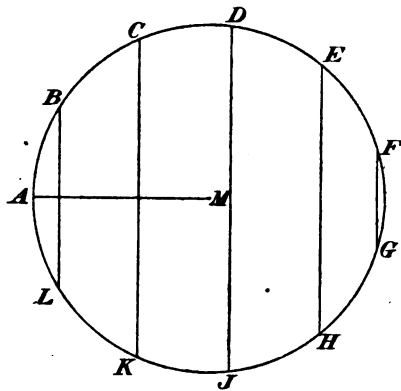


Fig. 4.

wie zuvor und so fort, bis der Radius wieder in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt. Dabei mag bei ungerader Anzahl der Mädchen der Buchstabe in der Mitte für die Vorsteherin gelten. — Daß so jede Person je einmal mit jeder anderen kombiniert wird, erkennt man, wenn man bedenkt, daß wegen der Teilung der Peripherie in eine ungerade Anzahl Teile der Radius und damit auch die zu ihm senkrechten Sehnen erst nach einer Drehung um 360° wieder in die alte Richtung

1) Dieselbe Aufgabe könnte man in folgender Fassung aussprechen: Alle Steine eines Dominospiels, dessen höchste Nummer eine ungerade (9 etwa) ist, mit Ausnahme der Doppelnummern sind so in Reihen anzuordnen, daß in jeder Reihe jede Nummer gerade einmal vorkommt.

2) Lucas, Récréat. II, p. 177.

kommen und dafs aus demselben Grunde die Sehnen niemals eine dem Radius je zukommende Richtung haben können. Da von jedem Punkt in jeder Stellung je eine Linie ausgeht, so gehen also in den $2n - 1$ Stellungen im ganzen $2n - 1$ Linien und zwar alle von verschiedener Richtung von ihm aus; jeder Punkt ist also mit allen $2n - 1$ anderen verbunden und zwar je einmal.

Diese Aufgabe ist von grosser praktischer Bedeutung für die Schachturniere, bei denen in jeder „Runde“ jeder Teilnehmer mit jedem anderen in je einer „Partie“ die Klinge kreuzt. Während wir es bei den Pensionatspromenaden als irrelevant ansahen, welches Mädchen rechts und welches links ging, ist es nun hier bei den Turnieren wesentlich, welcher der beiden Spieler anzieht resp. die weissen Figuren erhält. Wir haben daher unsere obige Lösung, um sie für ein Turnier brauchbar zu machen, so einzurichten, dafs jeder Teilnehmer ebenso oft Weiss wie Schwarz erhält.¹⁾ Dies läfst sich genau natürlich nur bei einer ungeraden Anzahl von Teilnehmern machen, da nur dann jeder Teilnehmer eine gerade Anzahl Partien spielt, also ebenso oft Weiss wie Schwarz haben kann. An Stelle der Pensionatsvorsteherin haben wir uns hier einen „blinden“ Spieler zu denken; der mit diesem jeweilig kombinierte Spieler hat seinen „freien Tag.“

Haben wir zunächst eine gerade Anzahl von Teilnehmern, so stellen wir vorläufig nur die erste und zweite Paarung fest, ohne die Frage des Anzugs zu berücksichtigen; es ergeben sich so bei 8 Teilnehmern z. B. für die beiden ersten Partien nach Fig. 5 die Paarungen:

I.	1, 2	3, 8	4, 7	5, 6
II.	1, 3	2, 4	5, 8	6, 7.

Da nun die Linien zweier benachbarter Stellungen ein zusammenhängendes geschlossenes Diagramm (s. Fig. 5) bilden,

1) Vgl. eine Arbeit des Verfassers „Über die Paarung der Turnierteilnehmer.“ II. Deutsche Schachzeitung Bd. 55, 1900, p. 130—132.

so können wir, von einer beliebigen Ecke 1 etwa längs der ausgezogenen Linie ausgehend, alle Linien unseres Achtecks durchwandern und zum Ausgang zurückkehren. Dabei bezeichnen wir die Linien nach der Richtung der Durchwanderung und erhalten so z. B. 1, 2, dann 2, 4 (nicht etwa 4, 2) u. s. w. und, wenn wir nun festsetzen, daß in jeder Kombination die erste Ziffer das Recht auf den Anzug gewährt, so erhält offenbar jeder Spieler in den beiden ersten Partien dies Recht je einmal. Für unser Beispiel erhalten wir so:

- I. 1, 2 8, 3 4, 7 6, 5
 II. 3, 1 2, 4 5, 8 7, 6.

Die dritte und vierte Anordnung nehmen wir wieder so zusammen u. s. w., während bei der letzten überzähligen Anordnung die Reihenfolge gleichgültig ist. Da jeder Spieler seine Nummer durch das Los erhält, nachdem vorher mit den Nummern das Spielprogramm festgestellt ist, so ist es in Fortuna's Hand gelegt, ob ein Teilnehmer einmal mehr Weiß oder Schwarz bekommt. Bei doppelrunden, d. h. aus 2 vollen Runden bestehenden Turnieren wird natürlich diese Ungleichheit vermieden, indem für die zweite Runde dasselbe Paarungsprogramm wie für die erste, nur mit Wechsel von An- und Nachzug, normiert.¹⁾

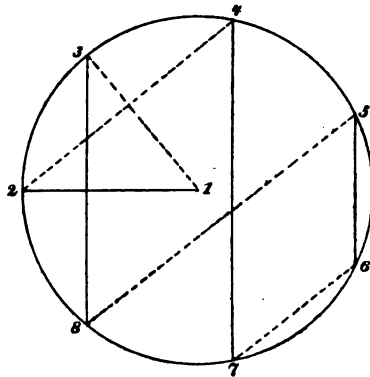


Fig. 5.

1) Doppelrundige Turniere sind wegen ihrer langen Zeitdauer relativ selten; von internationalen Turnieren waren doppelrundig: Paris 1867, Baden-Baden 1870, Paris 1878, Wien 1882, London 1883, New York 1889, Wien 1898 und London 1899; durch einen besonderen Modus, der dreimalige Paarungen derselben Spieler mit sich brachte, zeichnete sich das Wiener Turnier von 1873 aus (nach einer Mitteilung des Herrn E. Schollwer, Präsidenten des Magdeburger Schachklubs).

Ist die Anzahl der Teilnehmer dagegen ungerade, die Anzahl der Partien jedes Einzelnen also gerade, so läßt sich diese Ungleichheit natürlich vermeiden. Wie dies geschehen kann, wollen wir an dem Beispiel eines Turniers von 7 Teilnehmern zeigen. Der hinzuzunehmende Blinde sei 1, dann ergeben sich nach der obigen Methode ohne Rücksicht auf den Anzug folgende Anordnungen:

I.	1, 2	3, 8	4, 7	5, 6
II.	1, 3	2, 4	5, 8	6, 7
III.	1, 4	3, 5	2, 6	7, 8
IV.	1, 5	4, 6	3, 7	2, 8
V.	1, 6	5, 7	4, 8	2, 3
VI.	1, 7	6, 8	2, 5	3, 4
VII.	1, 8	2, 7	3, 6	4, 5.

Ordnen wir nun in den Partien I—VI wie oben An- und Nachzug, so würden wir für diese 6 Partien eine gleichmäßige Verteilung der Farben für alle Spieler haben, wenn die dem Blinden zuerteilten Partien wirklich zur Ausführung gelangten. Durch den Ausfall dieser Partien fällt nun aber für den einen Spieler ein Anzug, für den anderen ein Nachzug fort, und es wird die Aufgabe der letzten Partie VII sein, diese Ungleichheit wieder aufzuheben. Hat nun der Blinde (1), wie oben, in I Weiß, also in II Schwarz, in III wieder Weiß, also in IV Schwarz u. s. w., so fällt offenbar für alle „geraden“ Spieler (2, 4 . . .) je ein Nachzug und für alle „ungeraden“ (3, 5 . . .) je ein Anzug aus. Wie man aus der Figur 5 nun leicht erkennt, ist nicht nur in unserem speziellen Beispiel, sondern allgemein in der letzten Partie stets ein gerader mit einem ungeraden Spieler gepaart; dasselbe gilt auch noch für die erste Partie und liegt natürlich daran, daß 2 und 8 bzw. 2 und $2n$ die einzigen Kreisteilpunkte sind, denen auf der einen Seite ein „gerader“ und auf der anderen ein „ungerader“ Teilpunkt benachbart ist, während alle anderen Punkte entweder 2 gerade oder 2 ungerade Nachbarn haben. Giebt man

also in der letzten Partie den geraden Spielern überall Schwarz und den ungeraden Weifs, so wird dadurch gerade jene Ungleichheit wieder kompensiert und vollste Gleichheit bezüglich des Anzugs für alle Spieler erzielt.

Eine andere Methode für die Paarung der Turnierteilnehmer hat der in Schachkreisen bekannte verstorbene Leipziger Mathematiker R. Schurig gegeben.¹⁾ Anscheinend ist Schurig der erste, welcher ein methodisches Verfahren zur Herstellung der Paarungstabellen anwandte²⁾; bis dahin waren dieselben empirisch für jeden einzelnen Fall aufgestellt und, so unglaublich es klingt, die rechtzeitige Eröffnung des Nürnberger Turniers 1883 schien fast in Frage gestellt, da Herr Schallopp, der Verfertiger der Paarungstabellen, die in Frage kommende zu Hause vergessen hatte.³⁾ Anscheinend hat auch das Schurig'sche Verfahren in den Kreisen der praktischen Schachspieler noch wenig Verständnis gefunden, vielleicht, weil es ohne jede Begründung auseinandergesetzt war.

In etwas anderer Fassung wiedergegeben⁴⁾, gestaltet sich dies Verfahren, an dem Beispiel von 7 Teilnehmern veranschaulicht, folgendermaßen: Man schreibt zunächst in 4 (Anzahl der Paare unter Zurechnung eines Blinden) Kolonnen die Zahlen 1 . . . 7 zyklisch untereinander und zwar die erste mit 1 beginnend, die zweite mit 2 beginnend und mit 1 endigend, die dritte mit 3, die vierte mit 4 beginnend (mit 2 bzw. 3 endigend), also folgendermaßen:

1) Deutsche Schachzeitung Bd. 41, 1886, p. 134, sowie Bd. 49, 1894, p. 33—38; s. a. „Schach-Jahrbuch“ von J. Berger.

2) Herr Schoute hat auf dem Kongress der Association française pour l'avancement des sciences zu Limoges 1890 über die Paarungstabellen des Herrn Deelman, Sekretär des Staunton-Club zu Groningen, gesprochen, ohne dafs jedoch die Comptes rendus (XIX, t. I, p. 148) der betreffenden Gesellschaft über den Inhalt des Vortrags etwas Genaueres angeben.

3) E. Schallopp, „Der dritte Kongress des deutschen Schachbundes. Nürnberg 1883.“ Leipzig 1884, p. 29, 37.

4) Vgl. v. d. Verfasser „Über die Paarung der Turnierteilnehmer.“ I. Deutsche Schachz. Bd. 55, 1900, p. 98/99.

1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6
4	5	6	7
5	6	7	1
6	7	1	2
7	1	2	3.

Rechts neben jede dieser Kolonnen schreibt man je eine weitere Kolonne der 7 Zahlen und zwar, von rechts nach links gerechnet, anfangend mit bezw. 5, 6, 7 und 1 und erhält also schliesslich

1, 1	2, 7	3, 6	4, 5
2, 2	3, 1	4, 7	5, 6
3, 3	4, 2	5, 1	6, 7
4, 4	5, 3	6, 2	7, 1
5, 5	6, 4	7, 3	1, 2
6, 6	7, 5	1, 4	2, 3
7, 7	1, 6	2, 5	3, 4.

Diese Tabelle liefert uns direkt das fertige Paarungsprogramm, indem immer die erste Ziffer den Anspruch auf Weiss gibt. Die Doppelnummern 1, 1 etc. bedeuten, dass der Betreffende dann frei ist. Diese Tabelle gilt aber auch zugleich für 8 Teilnehmer, indem dann in den Doppelnummern abwechselnd die erste und zweite Ziffer durch 8 ersetzt wird.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens ergibt sich leicht folgendermassen: Zunächst sieht man leicht, dass bei ungerader Anzahl von Teilnehmern jeder derselben ebenso oft im Anzug wie im Nachzug ist, da alle Zahlen immer in den vorderen, wie hinteren Kolonnen je einmal vorkommen, so dass auch bei gerader Teilnehmerzahl, so weit wie möglich (s. oben), hierin Gleichheit erzielt ist. Ferner kommen in jeder Zeile alle Spieler je einmal vor, wenn wir die Doppelnummern links als je eine Zahl rechnen; denn die Zahlen jeder Reihe ergeben

sich aus den entsprechenden der darüber stehenden, indem man zu den letzteren überall 1 addiert, dabei jedoch 1 statt 8 setzt. Würde also irgendwo in einer Zeile dieselbe Zahl zweimal stehen, so müßte dies auch schon in der ersten Zeile der Fall sein, was aber nach Herstellung der Tabelle ausgeschlossen ist. Es fragt sich also nur noch, ob auch vielleicht dieselben Teilnehmer zweimal und andere gar nicht gepaart werden. Zu dem Zweck denken wir uns die verschiedenen Parteien durch Punkte veranschaulicht und diejenigen, in denen 1 am Anzug ist, durch eine Linie verbunden, an die wir 1 schreiben, entsprechend für 2 etc. Wir erhalten so die Fig. 6^a (die „Linien“ 2 und 3 zerfallen in je zwei Teile, je eine wirkliche Linie und einen isolierten Punkt).

Man sieht leicht, daß allgemein diese Linien parallel sein müssen.

Wir machen nun dasselbe für die Parteien des Nachzugs und wählen hier punktierte Linien; wir erhalten wieder parallele Linien, jetzt aber in der anderen Diagonalrichtung (s. Fig. 6^b).

Zwei Spieler spielen nun in den Parteien zusammen, deren entsprechende Punkte der ausge-

zogenen Linie des einen und der punktierten des anderen angehören; dies ist aber offenbar stets nur je ein Punkt, womit der Beweis erbracht ist.

Aus den Kreisen der praktischen Schachspieler heraus ist die Forderung gestellt, die Paarungstabellen so einzurichten, daß niemals ein Turnierteilnehmer in 2 aufeinanderfolgenden Parteien beide Male Weiß oder beide Male Schwarz habe, sondern Anzug und Nachzug für jeden Einzelnen ausnahmslos abwechselten. Schurig, der die Berechtigung dieser Forderung anerkennt, meint¹⁾, daß sich bei seinem Verfahren dieser Mangel

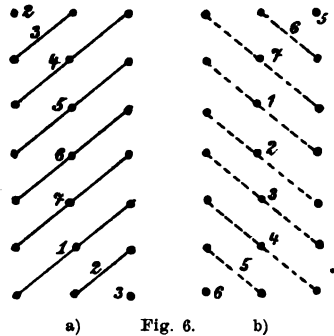


Fig. 6.

1) Deutsche Schachz. Bd. 49, 1894, p. 33.

leicht hätte beseitigen lassen, übersieht jedoch offenbar, daß auch die dort von ihm gegebenen Tabellen nicht durchweg jener Forderung genügen. Überhaupt sieht man sehr leicht¹⁾, daß dieser Übelstand — wenigstens bei gerader Spielerzahl — unvermeidlich, weil in der Natur der Sache begründet ist, und es kann höchstens die Forderung erhoben werden, denselben auf ein Minimum zu beschränken. Nehmen wir nämlich wieder beispielsweise 8 Teilnehmer an und geben 1, 2, 3, 4 bei der ersten Partie den Anzug und 5, 6, 7, 8 den Nachzug, so wollen wir einen Augenblick die Spieler 1, 2, 3, 4 als die „erste Klasse“ und 5, 6, 7, 8 als „zweite Klasse“ bezeichnen. Die erste Partie spielt sich dann in der Weise ab, daß die erste Klasse gegen die zweite spielt und die erste an allen vier Brettern den Anzug hat. Soll nun für jeden einzelnen Spieler Anzug und Nachzug regelmäÙig abwechseln, so müssen bei der zweiten Partie alle Spieler der ersten Klasse Schwarz, alle der zweiten dagegen Weiß erhalten, ebenso bei der vierten und sechsten Partie, während bei der dritten und fünften Partie die erste Klasse Weiß und die zweite Schwarz erhalte. Dann würden ja aber die Spieler der ersten Klasse ausschließlich gegen die der zweiten spielen und niemals die Spieler 1, 2, 3, 4 unter sich. Damit also thatsächlich, wie verlangt, jeder Spieler gerade einmal mit jedem anderen spielt, muß vielmehr von Zeit zu Zeit je ein Spieler aus der ersten Klasse zu der zweiten und umgekehrt übertreten, und von diesen beiden übertretenden Spielern hat der eine dann zweimal hintereinander Weiß, der andere Schwarz.

Bei unserer Benutzung der Walecki'schen Methode dürfte jedoch die Zahl der Farbenfolgen thatsächlich auf ein Minimum beschränkt sein. Um dies zu erkennen, greifen wir zunächst zurück auf Fig. 5. Dieselbe veranschaulichte uns die Paarung einer geraden Anzahl von Spielern für die beiden ersten Partien. Wir wollen für ein solches Paar von aufein-

1) Vgl. eine Note des Verf. Deutsche Schachz. Bd. 55, 1900, p. 227/228.

anderfolgenden Parteien kurz ein Kombinationsschema anmerken, indem wir die Ecken des Polygons der betreffenden Figur, beginnend mit einem Spieler, der in der ersten Partie Weiß hat, also etwa mit 1, der Reihe nach aufschreiben. Wir erhalten also zunächst für das dortige Beispiel als Schema:

$$1, 2, 4, 7, 6, 5, 8, 3$$

und können hiernach dann sofort die Paarungstabelle für die beiden ersten Parteien hinschreiben. Allgemein bei $2n$ Spielern erhält man offenbar für dies erste Schema:

$$1, 2, 4, 2n - 1, 6, 2n - 3, 8 \dots 5, 2n, 3.$$

Sehen wir von den beiden ersten Ziffern ab, so wechseln also gerade und ungerade Zahlen miteinander ab, die ersteren mit 4 am linken Ende beginnend, die letzteren mit 3 am rechten. Wenn wir also wieder von 2 Klassen sprechen wollen, so gehören zu der ersten 1 und alle „geraden“ Spieler aufser 2 und zu der zweiten 2 und alle „ungeraden“ Spieler aufser 1. Das zweite Schema nun, das uns die Paarungen für die dritte und vierte Partie liefert, erhalten wir aus der Figur 5, indem wir das Liniensystem um 2 Peripherieteilpunkte weiter im Uhrzeigersinne drehen, also rechnerisch, indem wir alle Zahlen mit Ausnahme der 1, welche unverändert bleibt, um 2 erhöhen, wobei von einer Zahl, die $> 2n$ ist, $2n - 1$ zu subtrahieren ist. Dies zweite Schema ist also:

$$1, 4, 6, 2, 8, 2n - 1, 10, 2n - 3, 12 \dots 2n, 7, 3, 5.$$

Es besteht also jetzt die erste Klasse aus 1, 3 und allen geraden Spielern aufser 2, 4 und die zweite aus 2, 4 und allen ungeraden Spielern aufser 1, 3. Alle Spieler, welche in der ersten Partie Weiß und in der zweiten Schwarz hatten, haben also in der dritten auch wieder Weiß und in der vierten Schwarz mit Ausnahme von 4, welcher durch seinen Übertritt zu der anderen Klasse zweimal hintereinander, nämlich in der zweiten und dritten Partie, Schwarz und dann in der vierten Weiß hat. Andererseits haben alle Spieler, welche mit „Schwarz, Weiß“ begonnen haben, jetzt wieder „Schwarz, Weiß“ mit Ausnahme von 3, der durch seinen Übertritt von der zweiten zur

ersten Klasse eine Farbenfolge, zweimal hintereinander Weifs, nämlich in der 2. und 3. Partie, erduldet. In derselben Weise, wie das zweite Schema aus dem ersten, geht nun das dritte aus dem zweiten hervor, und man sieht, dafs stets nach einer ungeraden Anzahl von Partien ausnahmslos für alle Spieler Farbenwechsel eintritt, nach einer geraden Anzahl jedoch für diejenigen 2 Spieler nicht, welche von den beiden Klassen gegeneinander ausgetauscht werden und von denen der eine zweimal hintereinander Weifs, der andere zweimal hintereinander Schwarz erhält. Auch bei der letzten Partie, welche ja bei gerader Spielerzahl eine, wie wir oben sahen, unvermeidliche Ungleichheit in der Verteilung von An- und Nachzug mit sich bringt, lassen sich die Farbenfolgen ebenso wie vorher beschränken, und es erleidet also schliesslich im Laufe des ganzen Turniers jeder Spieler gerade einmal eine Farbenfolge mit Ausnahme von zwei Spielern, welche hiervon ganz verschont bleiben und von denen der eine in der ersten und letzten Partie Weifs, der andere in diesen beiden Schwarz hat. Diese beiden Spieler bleiben eben während des ganzen Turniers in ihren ursprünglichen Klassen; mehr als je ein Spieler darf aber offenbar nicht beständig derselben Klasse angehören, da sonst ja nicht alle Spieler miteinander gepaart würden.

Ist die Anzahl der Spieler ungerade, so stellen wir zunächst unter Zuhülfenahme eines Blinden genau wie oben die Schemata her. Wir wissen, dafs für jeden Spieler mit Ausnahme von zweien gerade je einmal eine Farbenfolge eintreten würde, wenn der Blinde die ihm zudiktierten Partien wirklich spielte. Wegen des Fortfallens dieser Partien mufs man nun zunächst darauf gefafst sein, dafs für jeden Spieler noch eine weitere Farbenfolge auftritt, indem z. B. in der Reihe „Weifs, Schwarz, Weifs“ etwa Schwarz gerade herausfällt; ja, es könnte durch einen unglücklichen Zufall sich ereignen, dafs ein Spieler unmittelbar nach der für ihn ohnehin unvermeidlichen Farbenfolge seine Partie mit dem Blinden, also seinen freien Tag hat und dann die nächste Partie wieder mit derselben Farbe, also 3 Partien hintereinander mit der-

selben Farbe zu spielen hat. Andererseits können aber die oben unvermeidlichen Farbenfolgen durch die Partien mit dem Blinden auch gerade aufgehoben werden, indem von der Folge „Schwarz, Schwarz“ etwa das eine Schwarz als Partie mit dem Blinden fortfällt. Dies wird bei denjenigen Spielern eintreten, welche entweder unmittelbar vor oder unmittelbar nach ihrem Übertritt von der einen zur anderen Klasse mit dem Blinden gepaart sind. Man wird dies also gleichmäßig für alle Spieler erreichen, wenn man etwa den Blinden stets in derselben, der „ersten“ Klasse läßt (2 Spieler wechseln ja die Klasse nicht) und ihn nun immer mit demjenigen Spieler paart, der nach der betreffenden Partie aus der zweiten Klasse austreten soll bzw. mit dem, der gerade in diese Klasse übergetreten ist. In der ersten, in dieser Hinsicht gewissermaßen überzähligen Partie ist der Blinde danach offenbar mit demjenigen Spieler zu paaren, welcher die Klasse gleichfalls nie wechselt; in der zweiten sodann mit demjenigen, der von der zweiten Klasse designiert ist, nach Verlauf dieser Partie zu der Klasse des Blinden überzutreten; in der dritten mit demjenigen, der vor dieser Partie aus der Klasse des Blinden in die andere übergegangen ist u. s. w. Unsere oben für einen Spezialfall (7 Spieler) dargelegte Paarungsmethode ist hierauf schon zugeschnitten, und wir erhalten allgemein für $2n$ Spieler, unter denen 1 der Blinde ist, folgende Schemata:

1,	2,	4,	$2n - 1,$	6,	$2n - 3,$	$8 \dots 5,$	$2n,$	3
1,	4,	6,	2,	8,	$2n - 1,$	$10 \dots 7,$	3,	5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1,	$2n - 2,$	$2n,$	$2n - 4,$	3,	$2n - 6,$	$5 \dots 2,$	$2n - 3,$	$2n - 1$
	$1, 2n$	$3, 2n - 2$	$5, 2n - 4$	$7 \dots 4$	$2n - 1, 2.$			

Dabei repräsentiert jede Zeile 2 Partien, die letzte dagegen nur eine. Man sieht leicht, daß für keinen Spieler jemals eine Farbenfolge vorkommt; so hat 2 zunächst seinen freien Tag (eigentlich Schwarz), dann Weiß, darauf Schwarz und

immer abwechselnd; 3 hat zunächst Schwarz, dann seinen freien Tag (eigentlich Weiß), darauf wegen seines Übertritts zur anderen Klasse Weiß und nun abwechselnd. In diesem Fall einer ungeraden Spielerzahl haben wir also vollkommene Gleichmäßigkeit für alle Spieler sowohl bezüglich des Anzugs wie des Farbenwechsels erreicht, bei gerader Spielerzahl ist dies jedoch, wie gesagt, unmöglich.¹⁾

§ 3. Promenaden von n^2 Personen zu je n .

Handelt es sich um n^2 Personen und gehen immer je n , statt 2, in einer Reihe, so werden sich wohl stets solche Anordnungen treffen lassen, daß jede Person mit jeder anderen je einmal in derselben Reihe geht. Jede geht immer mit $n - 1$ in einer Reihe, und $n^2 - 1$, die Zahl aller Personen außer der betreffenden, ist durch $n - 1$ teilbar; die Zahl der erforderlichen Promenaden ist natürlich $\frac{n^2 - 1}{n - 1} = n + 1$. Ist n eine Primzahl, so ergibt sich sehr leicht eine Lösung²⁾; wir setzen das Verfahren an dem Beispiel $n = 5$ auseinander und wählen zunächst für die erste Promenade folgende Anordnung:

		I			
	1	2	3	4	5
	6	7	8	9	10
	11	12	13	14	15
	16	17	18	19	20
	21	22	23	24	25.

Die zweite Anordnung erhalten wir, indem wir jetzt die in I hintereinander gehenden Personen kombinieren, also die Vertikalreihen zu Horizontalreihen machen und umgekehrt, d. h.

1) Schurig erreicht — unbewußt — anscheinend dasselbe durch seine Methode, jedoch ist diese dafür nicht in der von uns oben aus anderen Gründen modifizierten, sondern in der ursprünglichen Form zu nehmen.

2) Vgl. Lucas, Récréat. II, p. 192 und Schubert, „Zwölf Geduldspiele“ p. 23.

II

1	6	11	16	21
2	7	12	17	22
3	8	13	18	23
4	9	14	19	24
5	10	15	20	25.

Eine dritte Anordnung erhalten wir, indem wir die erste Vertikale ungeändert lassen und die übrigen Zahlen zwar auch in ihrer bezüglichen Vertikalen belassen, jedoch so, daß die der zweiten Vertikalen um eine, die der dritten um 2 u. s. w. Stellen nach oben cyklisch vertauscht werden, so daß in die erste Zeile die Ziffern der Diagonalreihe \searrow von II kommen; man erhält so:

III

1	7	13	19	25
2	8	14	20	21
3	9	15	16	22
4	10	11	17	23
5	6	12	18	24

Die Anordnung IV entsteht aus III ebenso, wie III aus II, und so geht dies fort; wir erhalten also für die restierenden Anordnungen:

IV	V	VI
1 8 15 17 24	1 9 12 20 23	1 10 14 18 22
2 9 11 18 25	2 10 13 16 24	2 6 15 19 23
3 10 12 19 21	3 6 14 17 25	3 7 11 20 24
4 6 13 20 22	4 7 15 18 21	4 8 12 16 25
5 7 14 16 23	5 8 11 19 22	5 9 13 17 21.

Man erkennt leicht, daß diese Methode stets dann und nur dann anwendbar ist, wenn n eine Primzahl ist.¹⁾

1) Über eine weitere Verallgemeinerung dieses Falles siehe Abschnitt II, S. 285.

Dafs die Lösbarkeit unserer Aufgabe aber nichtsdestoweniger sich weiter erstreckt¹⁾, mag eine Lösung für $n = 4$, wo die obige Methode versagt, zeigen. Man erhält leicht folgende Anordnungen:

I				II				III				IV				V			
1	2	3	4	1	5	9	13	1	6	10	14	1	7	11	15	1	8	12	16
5	6	7	8	2	6	11	16	2	5	12	15	2	8	9	14	2	7	10	13
9	10	11	12	3	7	12	14	3	8	11	13	3	5	10	16	3	6	9	15
13	14	15	16	4	8	10	15	4	7	9	16	4	6	12	13	4	5	11	14

Abschnitt II. Kirkman's Schulmädchen-Problem.

§ 1. Einleitung. Verwandte Probleme.

Im Jahre 1850 stellte der Engländer Kirkman, angeregt durch ein in dem „Lady's and Gentleman's Diary“ 1844 erlassenes Preisausschreiben²⁾, folgende Aufgabe³⁾: *15 Pensionatmädchen gehen jeden Tag miteinander spazieren, je 3 in einer Reihe; wie sind die Anordnungen für die einzelnen Tage zu treffen, wenn im Laufe einer Woche jede gerade einmal mit jeder anderen in einer Reihe zusammen gehen soll?*⁴⁾

1) Wir heben dies besonders hervor, da von anderer Seite das Gegenteil behauptet ist.

2) Das von Woolhouse veranlafte Preisausschreiben verlangte, die Zahl der Kombinationen von n Elementen zu je a zu bestimmen, welche sich unter der Beschränkung herstellen lassen, dafs je b Elemente nie in mehr als einer Kombination zusammen vorkommen. Hierauf erging nur eine Lösung und zwar für den Fall $a = 3$, $b = 2$ von Seiten Kirkman's in „On a problem in combinations“, Camb. and Dubl. Math. J. II, 1847, p. 191—204. Die Beschäftigung mit dieser Preisfrage gab Kirkman dann den Anstofs zu der in Anm. 2 citierten Arbeit.

3) „Note on an unanswered prize question.“ Camb. and Dubl. Math. Journ. V, 1850, p. 260.

4) Kirkman's Autorschaft ist übrigens von Sylvester, „On the problem of the virgins“, Phil. Magaz. XVI, 1858, p. 371—376 — wie uns scheint, mit Unrecht — angezweifelt; Cayley schreibt das Problem (Phil. Magaz. XXXVII, 1850, p. 50 Anm.) dagegen Kirkman zu. — Es

Da jedes Mädchen an jedem Tage mit 2 anderen Mädchen zusammen in einer Reihe geht, so kann es in den 7 Tagen der Woche mit 14 verschiedenen, d. h. mit allen anderen je einmal zusammentreffen. Es fragt sich nur, ob sich eine Anordnung so treffen läßt, daß für alle 15 diese Forderung erfüllt ist, eine Frage, deren Beantwortung uns der § 2 geben wird.

Kirkman dürfte auch wohl der erste sein, welcher darauf aufmerksam gemacht hat¹⁾, daß für 9 Mädchen sich eine ähnliche Anordnung treffen läßt; nur trifft hier ein Mädchen natürlich bereits in 4 Tagen mit den übrigen 8 je einmal zusammen. Bezeichnen wir die 9 Mädchen mit den 9 ersten Buchstaben des Alphabets, so ergeben sich als Lösung unserer Aufgabe auf grund von Abschnitt I, § 3 folgende Anordnungen für die einzelnen Tage I, II, III, IV:

I	II	III	IV
<i>a, b, c</i>	<i>a, d, g</i>	<i>a, e, i</i>	<i>a, f, h</i>
<i>d, e, f</i>	<i>b, e, h</i>	<i>b, f, g</i>	<i>b, d, i</i>
<i>g, h, i</i>	<i>c, f, i</i>	<i>c, d, h</i>	<i>c, e, g</i>

Man überzeugt sich leicht, daß in den obigen Anordnungen wirklich, wie verlangt, jede Kombination von 2 Buchstaben ein-, aber auch nur einmal vorkommt.

Es darf nicht unerwähnt bleiben, daß bald nach Kirkman Jakob Steiner²⁾ eine Frage stellte, welche mit unserer Aufgabe nahe verwandt ist; er verlangte nämlich, aus den $\binom{n}{3}$ Kombinationen von n Elementen zu je 3 solche auszuwählen, daß jede Kombination von je zwei Elementen ein- und nur einmal darin vorkomme; und unter den Kombinationen zu je 4 wieder solche, daß jede Kombination zu 3 darin gerade einmal vorkomme etc.³⁾ Der einfachste Fall des Steiner'schen Problems,

sei beiläufig erwähnt, daß noch ein anderes Problem, das der Theorie der rationalen Funktionen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung angehört, die Bezeichnung „Kirkman's Problem“ führt (s. z. B. Encyklop. d. mathem. Wissensch. Bd. I, p. 469).

1) s. Camb. and Dubl. Math. Journ. V, 1850, p. 261.

2) Crelle's Journal Bd. 45, 1853, p. 181 oder Werke (herausgeg. v. Weierstraß) II, p. 435.

3) Eine noch allgemeinere Form dieses Anordnungsproblems ist offen-

die Bildung von Kombinationen zu 3, sogenannten „Ternen“, welche alle Kombinationen zu 2, die „Amben“, gerade einmal enthalten, ist bekanntlich für die Theorie der algebraischen Gleichungen von besonderer Bedeutung geworden. Solche Anordnungen von n — das hierfür $\equiv 1$ oder $3 \pmod{6}$ sein muß¹⁾ — Elementen, „Tripelsysteme“ genannt, spielen z. B. eine Rolle bei der algebraischen Auflösung der Gleichungen neunten Grades, welche die Inflexionspunkte einer ebenen Kurve dritter Ordnung bestimmen²⁾, und sind daher genauer studiert worden.³⁾

Gegenüber dem Problem der Tripelsysteme verlangt unser Kirkman'sches offenbar nur noch eine Einteilung der Ternen oder Tripel eines Tripelsystems so, daß in jeder Abteilung von Tripeln jedes der n Elemente gerade einmal vorkommt, was natürlich für $n \equiv 1 \pmod{6}$ unmöglich ist und daher nach Obigem: $n \equiv 3 \pmod{6}$ bedingt. Daß solche Anordnung für $n=9$ in der That möglich ist, haben wir bereits oben gesehen; für $n=15$ wird uns der nächste § dies zeigen.

bar die folgende: Von allen $\binom{n}{a}$ Kombinationen von n Elementen zu je a eine Anzahl e so auszuwählen, daß in diesen e je b Elemente immer je einmal kombiniert sind. Ausser dem weiter unten erwähnten Fall der „Tripelsysteme“ $\left(a=3, b=2, e=\frac{n(n-1)}{6}\right)$ sind folgende unter das Steiner'sche Problem fallende Fälle behandelt: $n=11, a=5, b=4, e=66$; $n=16, a=4, b=3, e=140$ von Lea (Educ. Times Repr. IX, 1863, p. 35—36 und 1874, p. 74—76; s. a. XI, 1869, p. 97).

1) s. Kirkman, On a problem in combinations. Camb. and Dubl. Math. J. II, 1847, p. 191—204.

2) O. Hesse, Crelle's Journal Bd. 28, p. 68 und Bd. 34, p. 191. Vgl. auch Noether, „Über die Gleichungen achten Grades“ etc. Math. Ann. XV, 1879, p. 89—110.

3) Mit Methoden zur Herstellung von Tripelsystemen beschäftigen sich: Reifs, Crelle's Journal Bd. 56, 1859, p. 326; Netto, Substitutionentheorie § 192 ff. u. Math. Ann. Bd. 42, p. 143; E. H. Moore, Math. Ann. Bd. 43, p. 271 u. New-York Bull. 1897, p. 11; L. Heffter, Math. Ann. Bd. 49, 1897, p. 101—112; J. de Vries, Rend. circ. matem. Palermo VIII, 1894; Brunel, Congrès de l'association franç. pour l'avanc. des sciences, Bordeaux 1895, t. II, p. 145, nachdem einzelne Fälle ausser in der für unseren Kirkman'schen Fall in Betracht kommenden Litteratur schon vorher behandelt waren von Anstice, Camb. and Dubl. Math. J. VIII, 1853, p. 149—154; Clausen, Über eine kombinatorische Aufgabe. Archiv der Math. u. Phys. XXI, 1853, p. 93—96 und Bills, Educ. Times Repr. VIII, 1867, p. 32—33; s. auch Zulauf, „Über Tripelsysteme von 13 Elementen.“ Diss. Gießen 1897.

Im Anschluß hieran entsteht die weitere Frage, ob und wann es möglich ist, die $\binom{n}{3}$ Ternern von n Elementen in lauter Tripelsysteme zu zerlegen, ein Problem, dessen Unmöglichkeit für $n = 7$ Cayley nachgewiesen hat.¹⁾

Auch sonst kommen Anordnungen, wie unser Kirkman'sches Problem sie verlangt, vor. So lassen sich in einer Gruppe von der Ordnung 16, deren Elemente aufser dem Einheitsselement sämtlich von der Ordnung 2 sind, die 15 Elemente der Ordnung 2 in 5 Abteilungen so teilen, daß immer je 3 mit dem Einheitsselement zusammen eine Untergruppe bilden, und zwar läßt sich diese Teilung auf 7 verschiedene Arten ausführen.²⁾

§ 2. Lösungen des Kirkman'schen Problems.

Die ersten Lösungen des Problems der 15 Schulfädchen dürften von Cayley³⁾ und Kirkman⁴⁾ angegeben sein. Nachher sind zahlreiche andere Lösungen gegeben, jedoch sind alle diesbezüglichen Arbeiten noch weit davon entfernt, eine Methode zu bieten, welche alle nur möglichen Lösungen des Problems liefert.⁵⁾ Wir begnügen uns daher damit, von den verschiedenen Methoden zur Herstellung von Lösungen zwei anzugeben, von welchen uns die eine besonders elegant, die andere besonders durchsichtig zu sein scheint.

Die erstere rührt von Pierce⁶⁾ her, welcher unter den

1) „On the Triadic Arrangements of Seven and Fifteen Things.“ *Phil. Mag.* XXXVII, 1850, p. 50—53 = *Collected Papers I*, p. 481—484.

2) s. Burnside, *Theory of groups of finite order*. Cambridge 1897, p. 60, Ex. 2.

3) *Phil. Mag.* XXXVII, 1850, p. 50.

4) „On the Triads made with Fifteen Things.“ *Phil. Mag.* XXXVII, 1850, p. 169.

5) Über eine neuere Arbeit von Herrn Mertelsmann, „Das Problem der 15 Pensionatsdamen.“ *Zeitschr. für Mathem. u. Phys.* Bd. 43, 1898, p. 329—334, reproduziert bei Schubert, „*Math. Mufsestunden*.“ 2. Aufl. Leipzig 1900. Bd. II, p. 55—63, mit angeblich über 15 Billionen Lösungen, s. eine Besprechung von dem Verf. in *Hoffmann's Zeitschr. für mathem. Unterr.* Bd. XXXI, 1900, p. 387/388.

6) „Cyclic solutions of the school-girl puzzle.“ *The astronomical Journal* by B. A. Gould, VI, 1861, p. 169—174.

15 Elementen eins (p) auszeichnet, die anderen 14 dagegen in Klassen zu je 7: $a_1, a_2 \dots a_7$ und $b_1, b_2 \dots b_7$, teilt und dann für die Sonntagspromenade zunächst etwa folgende Anordnung trifft:

I.

$$p \ a_1 \ b_1$$

$$b_4 \ a_5 \ a_7$$

$$b_6 \ a_3 \ a_4$$

$$b_7 \ a_2 \ a_6$$

$$b_2 \ b_3 \ b_5$$

Die Anordnungen für die anderen Tage ergeben sich dann einfach, indem man p ungeändert läßt und die Indices der anderen Elemente um je 1 erhöht, wobei für 8 dann wieder 1 zu setzen ist. Man erhält für den Montag z. B. die Anordnung:

$$p \ a_2 \ b_2$$

$$b_5 \ a_6 \ a_1$$

$$b_7 \ a_4 \ a_5$$

$$b_1 \ a_3 \ a_7$$

$$b_3 \ b_4 \ b_6$$

Man sieht leicht, daß p mit allen Elementen je einmal kombiniert wird, daß ferner je 2 der a je einmal kombiniert werden, da die Differenzen zwischen den Indices des ersten und des zweiten a in den verschiedenen Zeilen stets der Reihe nach -2 bzw. $+5$, -1 bzw. $+6$, -4 bzw. $+3$ sind; ferner, daß jedes b gerade einmal mit jedem a gepaart ist, da die Indices der b , um die der a vermindert, der Reihe nach die Differenzen 0 , -1 , -3 , $+3$, $+2$, $+5$, $+1$ ergeben, welche alle inkongruent mod 7 sind, und daß schließlich je 2 der b auch gerade einmal zusammen in der letzten Zeile vorkommen, weil die Differenzen der Indices dort -1 resp. $+6$, -3 resp. $+4$, -2 resp. $+5$, also alle von 0 verschiedenen Reste mod 7 sind.

Die so erhaltene Lösung besitzt eine Gruppe von der Ordnung 168. Man erkennt nämlich leicht, daß sie durch die Substitutionen

$$(a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7) (b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7) \text{ und}$$

$$(b_3 b_7) (b_5 b_6) (p a_4) (a_1 a_2) (a_3 a_5) (a_6 a_7)$$

wieder in sich übergeht.¹⁾ Diese beiden Substitutionen erzeugen nun eine Gruppe von der Ordnung $2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168$; es ist dies die bekannte einfache Gruppe²⁾, welche bei der Transformation der elliptischen Funktionen auftritt. Burnside hielt diese Gruppe für die Maximalgruppe einer Kirkman'schen Anordnung, wobei er von der Annahme ausging, daß eine solche Anordnung höchstens ein Tripelsystem von 7 Elementen enthalten könne, einer Annahme, die von Herrn Moore als irrig nachgewiesen ist, so daß Gruppen von noch höherer Ordnung hier auftreten können und thatsächlich auftreten.³⁾

Eine sehr einfache und durchsichtige Methode hat der englische Gelehrte Horner (Vikar in Everton) gegeben; dieselbe ist von Power⁴⁾ nach Mitteilungen des Autors publiziert worden. Die 15 Elemente denken wir uns zunächst in 2 Klassen zerlegt, die erste von 7, die zweite von 8 Elementen. Die 8 Elemente — wir nennen sie $c_1, c_2, c_3, c_4, d_1, d_2, d_3, d_4$ — mögen nun zunächst zu je 2 kombiniert werden und von diesen 28 Kombinationen immer je 4 so untereinander geschrieben werden, daß in jedem der so sich ergebenden 7 Sätze alle 8 Elemente vorkommen. Die gewünschte Anordnung, welche wir nach Horner reproduzieren, obwohl wir natürlich auch nach den in Abschnitt I, § 2 auseinandergesetzten Methoden hätten verfahren können, ergibt sich leicht folgendermaßen:

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
$c_1 c_2$	$c_1 c_3$	$c_1 c_4$	$c_1 d_1$	$c_1 d_2$	$c_1 d_3$	$c_1 d_4$
$c_3 c_4$	$c_2 c_4$	$c_2 c_3$	$c_2 d_2$	$c_2 d_1$	$c_2 d_4$	$c_2 d_3$
$d_1 d_2$	$d_1 d_3$	$d_1 d_4$	$c_3 d_3$	$c_3 d_4$	$c_3 d_1$	$c_3 d_2$
$d_3 d_4$	$d_2 d_4$	$d_2 d_3$	$c_4 d_4$	$c_4 d_3$	$c_4 d_2$	$c_4 d_1$

1) s. Burnside, On an application of the theory of groups to Kirkman's Problem. Messenger of Mathematics. XXIII, 1893/94, p. 137—143.

2) Vgl. z. B. Klein-Fricke, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen. 1890 Bd. I, p. 488 ff., sowie Dyck, Gruppentheoretische Studien. Mathem. Annal. XX, 1882, p. 41.

3) Moore, Concerning the General Equations of the Seventh and Eighth Degrees. Math. Annal. Bd. 51, 1899, p. 417—444.

4) „On the problem of the fifteen school girls.“ Quart. J. of Mathem. VIII, 1867, p. 236—251.

Jedes der 8 Elemente ist hier gerade einmal mit jedem anderen verbunden. Vor die Kombinationen dieser 7 Sätze denken wir uns nun der Reihe nach unsere anderen 7 Elemente — wir nennen sie $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4$ — gesetzt und zwar a_1 vor die von I, a_2 vor die von II etc. Wir erhalten so 28 Kombinationen von je 3 Elementen, so zwar, daß in diesen Kombinationen nicht nur alle Elemente der zweiten Klasse gerade einmal zu je 2 miteinander, sondern auch jedes der 7 Elemente mit jedem der 8 Elemente gerade einmal kombiniert ist. Es fehlen uns also nur noch solche Kombinationen der 7 Elemente unter sich, in denen jedes gerade einmal mit jedem der übrigen 6 kombiniert ist; diese sind aber $a_1 a_2 a_3$; $a_1 b_1 b_2$; $a_1 b_3 b_4$; $a_2 b_1 b_3$; $a_2 b_2 b_4$; $a_3 b_1 b_4$; $a_3 b_2 b_3$. Wir haben damit im ganzen 35 Kombinationen, nämlich:

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
$a_1 a_2 a_3$						
$a_1 b_1 b_2$	$a_2 b_1 b_3$	$a_3 b_1 b_4$				
$a_1 b_3 b_4$	$a_2 b_2 b_4$	$a_3 b_2 b_3$				
$a_1 c_1 c_2$	$a_2 c_1 c_3$	$a_3 c_1 c_4$	$b_1 c_1 d_1$	$b_2 c_1 d_2$	$b_3 c_1 d_3$	$b_4 c_1 d_4$
$a_1 c_3 c_4$	$a_2 c_2 c_4$	$a_3 c_2 c_3$	$b_1 c_2 d_2$	$b_2 c_2 d_1$	$b_3 c_2 d_4$	$b_4 c_2 d_3$
$a_1 d_1 d_2$	$a_2 d_1 d_3$	$a_3 d_1 d_4$	$b_1 c_3 d_3$	$b_2 c_3 d_4$	$b_3 c_3 d_1$	$b_4 c_3 d_2$
$a_1 d_3 d_4$	$a_2 d_2 d_4$	$a_3 d_2 d_3$	$b_1 c_4 d_4$	$b_2 c_4 d_3$	$b_3 c_4 d_2$	$b_4 c_4 d_1$

Das bisherige Verfahren läßt sich dahin charakterisieren, daß auf grund eines Tripelsystems der 7 Elemente zweiter Klasse ein solches für alle 15 Elemente gebildet ist.

Jede Kombination von je 2 der 15 Elemente kommt so gerade einmal vor, und es handelt sich nur noch darum, diese 35 Kombinationen zu je 5 so zusammenzunehmen, daß diese 5 immer alle 15 Elemente enthalten (vgl. S. 276). Die 5 so zusammenzufassenden gehören natürlich stets verschiedenen Spalten (I, II etc.) an, da die Kombinationen derselben Spalte immer in einem Element übereinstimmen. Wählen wir also zunächst $a_1 a_2 a_3$ aus, so dürfen wir keine Kombination der Spalte I mehr dazu nehmen, aber auch keine von II und III, dagegen etwa $b_1 c_1 d_1$ aus IV. Von V dürfen wir dann die erste und zweite, welche c_1 resp. d_1 enthalten, nicht mehr

wählen, dagegen etwa: $b_2 c_3 d_4$ und hierzu dann aus VI und VII: $b_3 c_4 d_2$ und $b_4 c_2 d_3$. Wir erhalten also:

$$\begin{array}{l} a_1 a_2 a_3 \\ b_1 c_1 d_1 \\ b_2 c_3 d_4 \\ b_3 c_4 d_2 \\ b_4 c_2 d_3. \end{array}$$

Man sieht leicht, daß 4 dieser 5 Kombinationen immer aus den 28 zuerst gebildeten und die fünfte aus den 7 zuletzt gebildeten Kombinationen zu wählen ist. Wir erhalten so leicht folgende Anordnung und somit schließliche Lösung unseres Problems:

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
$a_1 a_2 a_3$	$a_1 b_1 b_2$	$a_1 b_3 b_4$	$a_1 d_3 d_4$	$a_1 d_1 d_2$	$a_1 c_3 c_4$	$a_1 c_1 c_2$
$b_1 c_1 d_1$	$a_2 c_1 c_3$	$a_2 c_2 c_4$	$a_2 b_1 b_3$	$a_2 b_2 b_4$	$a_2 d_1 d_3$	$a_2 d_2 d_4$
$b_2 c_3 d_4$	$a_3 d_3 d_3$	$a_3 d_1 d_4$	$a_3 c_1 c_4$	$a_3 c_2 c_3$	$a_3 b_2 b_3$	$a_3 b_1 b_4$
$b_3 c_4 d_2$	$b_3 c_2 d_4$	$b_1 c_3 d_3$	$b_2 c_2 d_1$	$b_1 c_4 d_4$	$b_1 c_2 d_2$	$b_2 c_4 d_3$
$b_4 c_2 d_3$	$b_4 c_4 d_1$	$b_3 c_1 d_2$	$b_4 c_3 d_2$	$b_3 c_1 d_3$	$b_4 c_1 d_4$	$b_3 c_3 d_1$

Auf eine Besprechung der Lösungen von Anstice¹⁾, Woolhouse²⁾, Frost³⁾, Carpmael⁴⁾ und Gill⁵⁾ verzichten wir.

1) Anstice, „On a problem in combinations.“ Camb. and Dubl. Math. Journ. VII, 1852, p. 279—292. Hieran schließt sich eine Arbeit Kirkman's an „On the Puzzle of the Fifteen Young Ladies.“ Phil. Mag. XXIII, 1862, p. 198—204.

2) Lady's and Gentleman's Diary, 1862, p. 84—88 und 1863, p. 79—90.

3) Frost, „General solution and extension of the problem of the 15 school girls.“ Quart. J. of Mathem. XI, 1871, p. 26—37.

4) „Some solutions of Kirkman's 15 school-girl-problem.“ London Math. Soc. Proc. XII, 1881, p. 148—159. Ein Teil der Lösungen stimmt mit denen von Woolhouse überein, wie der Autor selbst bemerkt.

5) Publiziert durch Ball, Mathem. Recreations. 3. Auf. Franz. Übers. v. Fitz-Patrick 1898, p. 158.

§ 3. Sylvester's Forderung.

Die Anzahl aller Kombinationen von 15 Elementen zu je 3 ist $= \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35 \cdot 13$, also 13-mal so groß als die zu einer Lösung unseres Problems erforderliche Anzahl. Es lag daher nahe, die Fragestellung dahin zu erweitern, ob es möglich sei, daß 15 Mädchen in jeder der 13 Wochen eines Vierteljahres der Kirkman'schen Bedingung entsprechend spazieren gehen und dabei während des ganzen Vierteljahres niemals dieselben 3 mehr als einmal zusammen in einer Reihe gehen. Diese Fragestellung rührt von Sylvester^{1) 2)} her; eine definitive Beantwortung derselben ist bisher nicht gegeben, jedoch darf man mit Cayley¹⁾ wohl annehmen, daß diese Aufgabe unlösbar ist³⁾, wenn auch Sylvester anscheinend noch sehr viel später an seiner Forderung festgehalten hat (s. die in Anm. 2 citierte Arbeit).

Nehmen wir jedoch wieder den einfacheren Fall der 9 Mädchen an, so läßt sich die Sylvester'sche Bedingung *mutatis mutandis* erfüllen. Es giebt hier $\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 12 \cdot 7$ Kombinationen zu je 3; denken wir uns, die Mädchen gingen täglich viermal spazieren, so würden bei einer dem Kirkman'schen Problem entsprechenden Anordnung je 2 täglich einmal zusammen in derselben Reihe gehen, und die Sylvester'sche Forderung würde darin bestehen, dies auf die ganze Woche (7 Tage) auszu-

1) Cayley, l. c. p. 52.

2) s. auch Sylvester's spätere Arbeit „Note on a nine schoolgirls problem.“ *Messenger of Math.* XXII, 1893, p. 159.

3) Kirkman (*Camb. and Dubl. Math. Journ.* V, 1850, p. 261 und *Phil. Mag.* XXXVII, 1850) versteht die Sylvester'sche Forderung irrtümlich dahin, daß die Spaziergänge durch so viele Wochen fortgesetzt werden sollen, bis jede Terne *wenigstens einmal* vorgekommen ist und giebt eine solche Anordnung für 15 Wochen, für welche die Sonntagsanordnung immer dieselbe ist. Für den Fall der neun Mädchen faßt Kirkman übrigens die Sylvester'sche Bedingung, wie wir unten sehen werden, auch in dem richtigen Sinne.

dehnen, so zwar, daß niemals dieselben 3 mehr als einmal zusammen eine Reihe bilden. Es müssen also die 12 · 7 Kombinationen zu 7 Systemen von je 12 angeordnet werden, deren jedes die Kirkman'sche Bedingung erfüllt. Solche Anordnungen haben Kirkman¹⁾, Sylvester²⁾ und Walecki³⁾ gegeben. Nach dem Vorgang Sylvester's gehen wir aus von

$$a, b, c$$

$$d, e, f$$

$$g, h, i$$

und stellen 2 weitere Anordnungen durch cyklische Vertauschungen der Buchstaben der ersten Vertikalreihe her, ebenso 2 weitere durch Vertauschungen in der zweiten und schließlich noch 2 weitere durch solche in der dritten Vertikalreihe; man erhält so folgende 6 Anordnungen:

$$\begin{array}{ccccccc} d, b, c & g, b, c & a, e, c & a, h, c & a, b, f & a, b, i \\ g, e, f & a, e, f & d, h, f & d, b, f & d, e, i & d, e, c \\ a, h, i & d, h, i & g, b, i & g, e, i & g, h, c & g, h, f. \end{array}$$

In jeder dieser 6 Anordnungen nehmen wir nun noch in einer Horizontalreihe, also etwa der ersten, eine cyklische Vertauschung vor und zwar im ersten und zweiten Satze in entgegengesetzten Richtungen, dgl. im dritten und vierten u. s. w. und erhalten so unter Hinzunahme der ursprünglichen Anordnung:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
a, b, c	b, c, d	c, g, b	e, c, a	c, a, h	b, f, a	i, a, b
d, e, f	g, e, f	a, e, f	d, h, f	d, b, f	d, e, i	d, e, c
g, h, i	a, h, i	d, h, i	g, b, i	g, e, i	g, h, c	$g, h, f.$

1) Camb. and Dubl. Math. Journ. V, 1850, p. 261.

2) Messenger of Math. (2) XXII, 1893.

3) s. Lucas, Récrcat. II, 1896, p. 193—196. Die von Lucas gebrauchte Bezeichnung des Problems als eines Walecki'schen entspricht aber nicht dem Sachverhalt.

Diese 7 Anordnungen sind nun die Schemata für die ersten Promenaden an jedem Tage, und aus ihnen ergeben sich dann je 3 weitere, wie § 1, S. 275 auseinandergesetzt ist. Dabei kommt jede der 84 Kombinationen gerade einmal vor.

§ 4. Erweiterungen und Verallgemeinerungen.

Selbstverständlich sind nicht 9 und 15 die einzigen Zahlen, für welche eine Auswahl der Ternen im Kirkman'schen Sinne möglich ist; vielmehr hat Kirkman¹⁾ selbst schon die Möglichkeit einer solchen Anordnung bei $5 \cdot 3^{m+1}$ und Mease die bei 3^{m+1} Elementen gezeigt, letzterer unter Angabe einer Lösung für 27 Elemente.²⁾ Frost stellt sich das allgemeinere Problem einer Kirkman'schen Anordnung bei $2^{2m} - 1$ Elementen und giebt für den Fall von 63 Elementen eine ausführliche Lösung³⁾ mit dem Hinzufügen, daß auch für den nächsten Fall seiner Reihe, den von 255 Elementen, die angewandte Methode ausreiche; Anstice⁴⁾ schließlic zeigt, daß Kirkman'sche Anordnungen für $12m + 3$ Elemente möglich sind. Von diesen verschiedenen Reihen steckt übrigens die Frost'sche in der Anstice'schen, weil

$$(2^{2m} - 1) - 3 = (2^m - 1)(2^m + 1) - 3 = 2^{2m} - 4$$

offenbar sowohl durch 3 wie durch 4, also durch 12 teilbar ist.

Wir wollen jedoch noch hinzufügen, daß, wenn für eine gewisse Anzahl n von Personen eine Lösung des Kirkman'schen Problems existiert, eine solche sich nach Walecki⁵⁾ auch für die dreifache Anzahl $3n$ angeben läßt. Ist z. B. $n = 15$, so denken wir uns die 45 Personen in 3 Scharen zu je 15 geteilt und geben zunächst 7 Anordnungen der 45, in denen nach der bekannten Methode die 15 Personen derselben Schar im Kirkman'schen Sinne kombiniert sind. Sodann schreiben wir die 3 Scharen untereinander:

1) Camb. and Dubl. Math. Journ. V, p. 259; s. a. Phil. Mag. XXXVII.

2) Mitgeteilt in Camb. and Dubl. Math. Journ. V, p. 261 durch Kirkman, der selbst im Phil. Mag. XXXVII einen noch allgemeineren Satz („Theorem II“) aufgestellt hat.

3) l. c. p. 32—37.

4) l. c. p. 279.

5) s. Lucas, Récréat. II, p. 189.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15,
 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30,
 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45.

und stellen eine achte Anordnung her, indem wir je 3 untereinander stehende Ziffern kombinieren; eine weitere Anordnung erhalten wir, indem wir von den 3 obigen Reihen die erste ungeändert lassen, die Ziffern der zweiten um eine und die der dritten um zwei Stellen nach links cyklisch vertauschen und nun wieder die untereinander stehenden kombinieren; hieraus ergibt sich genau entsprechend wieder eine Anordnung u. s. f. Man erhält so 15 (allgemein n) Anordnungen zu den 7 (allgemein $\frac{n-1}{2}$), welche die Lösung für 15 resp. n Personen schon liefert, hinzu, d. h. im ganzen 22 resp. $\frac{3n-1}{2}$, wie es sein muß.

Zur einzigen Voraussetzung hat dies Verfahren offenbar, daß n ungerade ist, was ja aber nach S. 276 ohnehin stets eine unerläßliche Bedingung für jede Kirkman'sche Anordnung ist. Man erkennt auch sofort, daß dies Prinzip sich gleichfalls anwenden läßt, um aus den Promenaden von n^2 Personen zu je n allgemein Lösungen für Promenaden von n^r Personen zu je n herzuleiten, vorausgesetzt jedoch, daß n eine Primzahl ist.¹⁾ Durch diese Methode erledigt sich u. a. dann auch der oben angeführte Mease'sche Fall.

1) Lucas, Récréat. II, p. 191.

Kapitel XV.

Das Josephsspiel.

Voilà une histoire bien remarquable, et qui nous apprend assez qu'on ne doit point mépriser ces petites subtilités, qui aiguisent l'esprit, habitant l'homme à de plus grandes choses, et apportent quelquefois une utilité non prévue.

BACHET. Probl. plaisants et délectables, Préface.

§ 1. Geschichte und Wesen des Spiels.

Von dem bekannten jüdischen Historiker Josephus wird erzählt, daß er bei Eroberung der Stadt Jotapata durch Vespasian mit 40 anderen Juden vor den anstürmenden Feinden in einen Keller flüchtete, hier aber noch, vor den Feinden zwar vorläufig geborgen, Gefahr lief, den Todesstreich von der Hand seiner Genossen zu empfangen, die alle lieber gegenseitig sich töten als den Römern etwa in die Hände fallen wollten und schon drohten, den Widerstand, welchen Josephus diesem Vorhaben entgegengesetzte, gewaltsam zu brechen. Von der Ausichtslosigkeit einer gütlichen Einigung überzeugt, sah Josephus sich schließlicly gezwungen, gute Miene zum bösen Spiel zu machen, und rettete sein und eines vertrauten Freundes Leben nur durch eine List, indem er zur Vermeidung der Unordnung bei einer allgemeinen wechselseitigen Niedermetzelung einen geordneten Modus hierfür vorschlug, so zwar, daß alle sich in einer Reihe aufstellten und nun von einem Ende ab abgezählt werden sollte, wobei jedesmal der Soundsovielte (nach einigen Autoren der „dritte“) getötet werden sollte,

während der letzte sich selbst töten sollte. Josephus sicherte sich dabei einen solchen Platz, daß er als der letzte und der erwähnte Freund als vorletzter ausgezählt werden mußte. — In dieser Form mit nur unwesentlichen Varianten zieht sich die Geschichte von der wunderbaren Rettung des Josephus fast durch die ganze Litteratur. Immerhin ist für eine bewußt zur Anwendung gebrachte List schwerlich ein Beleg aufzufinden, vielmehr berichtet Josephus selbst, daß das Los entschieden habe und er „durch einen glücklichen Zufall oder eine Vorsehung Gottes“ gerettet sei.¹⁾ Die angebliche List des Josephus dürfte also wohl einer späteren Legendenbildung zuzuschreiben sein. Wenn also Bachet diese Erzählung in der Vorrede zu seinen „Problèmes plaisants“²⁾ als einen Beleg dafür anführt, daß Fragen, wie die in seinem Buche behandelten, unter Umständen von großem Nutzen sein könnten, so erscheint dieses Beispiel seiner zweifelhaften Glaubwürdigkeit wegen gerade nicht glücklich gewählt. Hieran wieder anknüpfend stellt Bachet dann weiterhin folgende Aufgabe³⁾: „Auf einem Schiff befinden sich 15 Christen und 15 Türken. Als sich ein gewaltiger Sturm erhebt, erklärt der Schiffsführer es für notwendig, die Hälfte der auf dem Schiff befindlichen Personen ins Meer zu werfen, um den Rest

1) Flavii Josephi Opera, ed. Dindorfius, Paris 1847, De bello iudaico, liber III, caput VIII, 7: *Καταλείπεται δὲ οὗτος, εἶτε ὑπὸ τύχης καὶ λέγειν εἶτε ὑπὸ Θεοῦ προνοίας σὺν ἑτέρῳ*. — Auch die gewöhnlich hierfür citierte Bearbeitung des „bellum iudaicum“ durch Hegesippus (Pseudonym eines unbekanntenen Autors, vielleicht des Ambrosius von Mailand, vgl. Teuffel, Röm. Litteratur II, § 433), „De bello iudaico“ ed. C. F. Weber et J. Caesar, Marburg 1864, liber III, cap. XV—XVIII spricht nur von einer Entscheidung durch das Los und fügt dann hinzu: *itaque accidit ut interemtis reliquis Iosephus cum altero superesset neci*. — Übrigens wird nach einer anderen Überlieferung auch der jüdische Gelehrte Abraham Ibn Esra als Erfinder derselben List hingestellt (vgl. Steinschneider, Abraham Ibn Esra. Zeitschr. für Math. u. Phys. XXV, 1880, Supplementh. p. 123 u. 124).

2) 4. Aufl. p. 8; s. das unserem Kapitel vorangesetzte Citat daraus.

3) a. a. O. Problème XXIII, p. 118 (p. 174 der 2ten Aufl.).

zu retten. Man einigt sich dahin, daß alle Personen sich in einer Reihe aufstellen und nun abgezählt wird, wobei jeder neunte immer ins Meer geworfen wird, bis nur noch 15 bleiben. Es ist die Frage: Wie muß die Aufstellung erfolgen, damit gerade die 15 Türken die Opfer des Meeres werden?“

Dieselbe Aufgabe hatte schon vorher Cardan behandelt¹⁾ und sie mit Rücksicht auf die oben erzählte Geschichte „Josephs-
spiel (ludus Joseph)“ genannt.

Der Abzählungsmodus ist natürlich so zu verstehen, daß, wenn man bei der Zählung die Reihe durchlaufen hat, an dem anderen Ende die Zählung fortgesetzt wird und daß jeder einmal Ausgeschiedene bei den weiteren Zählungen nicht mehr mitzählt. Durch einfaches Probieren läßt sich die Aufgabe für jeden bestimmten Fall natürlich leicht lösen, so erhalten wir für das oben angegebene Problem der 15 Christen und 15 Türken, wenn wir einen Türken durch einen vertikalen Strich, einen Christen durch ein Kreuz bezeichnen, folgende Anordnung, damit durch eine am linken Ende beginnende Abzählung gerade die 15 Türken der Reihe nach als die neunten getroffen werden:

† † † † | | | | † † | † † † † | † | | † † | | | † | | † † |

d. h. die Reihenfolge muß von links nach rechts sein: 4 Christen 5 Türken, 2 Chr., 1 T., 3 Chr., 1 T., 1 Chr., 2 T., 2 Chr., 3 T., 1 Chr., 2 T., 2 Chr., 1 T.

Als mnemotechnisches Hilfsmittel giebt Bachet dieser Lösung den Vers bei²⁾:

Mort, tu ne falliras pas
En me livrant le trépas!

Die Vokale desselben, der Reihe nach aufgeschrieben und bezw. durch die in dem Schema $\begin{matrix} a & e & i & o & u \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix}$ darunterstehenden

1) Practica Arithmeticae generalis 1539, IX, 117—128. Nach Cantor, Gesch. der Mathem. II, p. 332 findet sich unser Spiel zuerst in dem erst 1880 gedruckten und bis dahin handschriftlich verbreiteten Werke von Chuquet, Le Triparty en la science des nombres, Lyon 1484, Aufg. 146.

2) a. a. O. p. 119 (p. 175 der 2ten Aufl.).

Ziffern ersetzt, geben abwechselnd die Zahlen der Christen und Türken der obigen Lösung, wobei die erste Zahl sich auf Christen, die zweite auf Türken u. s. w. abwechselnd bezieht. Ein lateinischer Merkvers Ozanam's, der dieselbe Vokalreihe aufweist, lautet:

Populeam virgam mater regina ferebat;

ferner existiert ein englischer:

From numbers' aid and art
Never will fame depart

und ein deutscher:

Gott schlug den Mann in Amalek,
Den Israel bezwang.

Es mag hier noch erwähnt werden, dafs ein vor wenigen Jahren patentiertes Spiel¹⁾ auf dasselbe hinauskommt, wenn auch das Prinzip unserer Aufgabe dabei nur in seiner einfachsten Form auftritt: Eine Anzahl Steine werden in dem Kreis *A* (s. Fig. 1) aufgestellt; der erste wird durch *O* in den Kreis *B* geschoben, dann der zweite in *A* hinter die anderen, der dritte wieder nach *B* geschoben, der vierte wieder hinter die anderen von *A* u. s. f. In *B* sollen die Steine dann in bestimmter Reihenfolge erscheinen; wie muß die Aufstellung in *A* gewählt werden, damit diese Reihenfolge herauskommt? Wenn z. B. bei 12 Steinen die Anordnung in *B* sein soll: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, so muß man in *A* die Steine aufstellen in der Ordnung: 1, 7, 2, 10, 3, 8, 4, 12, 5, 9, 6, 11.

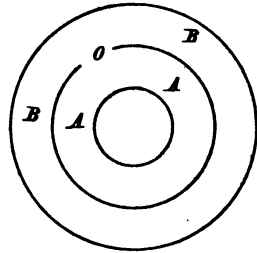


Fig. 1.

§ 2. Die umgekehrte Aufgabe.

Eine mathematische Behandlung unseres Problems, dahingehend, das Abzählverfahren durch eine allgemeine Regel zu ersetzen, hat lange

1) Reichspatent Nr. 43927, erteilt an Gymnasiallehrer Heinr. Knobel in Berlin 1887, jetzt gelöscht.

auf sich warten lassen. Herrn Schubert ist es indessen gelungen, eine befriedigende mathematische Erledigung zu finden, und zwar ist er hierzu durch eine induktiv gefundene Rekursionsformel gelangt.¹⁾ Den Beweis für Schubert's Methode hat dann Herr Busche in der soeben citierten Arbeit geliefert, auf welche wir uns im folgenden vorzugsweise stützen werden.

Das zu behandelnde Problem in allgemeiner Fassung lautet offenbar:

Eine beliebige Anzahl n von Punkten, die man sich etwa auf einer Kreisperipherie angeordnet denken möge, ist der Reihe nach mit den Zahlen 1 bis n bezeichnet. Man zählt nun, bei 1 anfangend und über n hinaus wieder bei 1 fortfahrend, fortgesetzt bis d und scheidet jeden Punkt von der weiteren Abzählung aus, auf den einmal die Zahl d gefallen ist. Die zu beantwortende Frage ist dann: welches ist die Nummer ν des Punktes, der als der e -te ausgeschieden wird? Dabei kann $0 < d \leq n$ sein; die Zahl e ist natürlich $\leq n$ und positiv.

Wir kehren mit Busche zunächst die Fragestellung einmal um, indem wir ν als bekannt und e als gesucht ansehen, also fragen: als wievielter unter allen scheidet der Punkt von der Platznummer ν bei der Abzählung aus? Zählt man, statt bei 1 anfangend, von $\nu - 1$ ab in umgekehrter Richtung, so daß also ν der Endpunkt der Reihe ist, so wird jetzt offenbar die Reihenfolge der ausscheidenden Punkte eine andere werden, es muß aber offenbar jetzt der Punkt n , der ja bei einer neuen, unserer jetzigen Zählordnung entsprechenden Numerierung die Nummer ν bekommen würde, als e -ter Punkt ausscheiden, wie vorher ν . Die Punkte behalten zunächst ihre ursprünglichen Platznummern bei, aber jedesmal, wenn bei dieser Abzählung ein Punkt ausgeschieden wird, sollen alle von neuem numeriert werden, aber dabei der Punkt n immer der Nullpunkt für diese Numerierung bleiben, was natürlich nicht ausschließt, daß er daneben nach jedem Umlauf noch seine zweite Nummer als Endpunkt, welche der Anzahl der dann noch gerade vorhandenen Punkte gleich ist, erhält, während dagegen der

1) s. Busche „Über die Schubert'sche Lösung eines Bachet'schen Problems“. Mathem. Annal. Bd. 47, p. 105. In den „12 Geduldspielen“ des Herrn Schubert ist die Lösung p. 124—132 ohne Beweis mitgeteilt. — Übrigens waren — etwa gleichzeitig mit Schubert — auf die im Intermédiaire des mathématiciens gestellten Fragen 32 und 330 Antworten der Herren Cesàro (t. I, p. 30—31), Franel (t. I, p. 31; II, p. 122), Adrien Akar (t. I, p. 189—190), Delannoy (t. II, p. 120—121) und Moreau (t. II, p. 229) eingegangen, in denen sich die wesentlichen Punkte der Schubert'schen Lösung auch finden.

Punkt 1 seine Nummer behält, bis er ausscheidet. Wenn nun beim Zählen von $\nu - 1$ aus der Nullpunkt mit der Nummer n zum ersten Mal überschritten wird, indem vorher etwa die Punkte $\nu - d, \nu - 2d \dots \nu - \mu d$ ($\mu \geq 0$) ausgeschieden sind, so scheidet nachher der Punkt $\nu - (\mu + 1)d + k(n - \mu)$ aus, wo k die kleinste Zahl ist, welche diesen Ausdruck positiv macht (der Nullpunkt hat jetzt als zweite Nummer eben die Nummer $n - \mu$). Wäre nun zufällig $\nu = (\mu + 1)d$, d. h. würde beim ersten Mal schon der Nullpunkt ausgeschieden, so wäre natürlich das gesuchte $e = \mu + 1$; sonst geht aber die Zählung fort, indem nun von $\nu - (\mu + 1)d + k(n - \mu)$ wieder successive $d, 2d \dots$ abgezogen werden, bis der Ausdruck negativ wird, wo dann wieder ein Vielfaches von der Anzahl der dann noch verbleibenden Punkte zu addieren ist und zwar das kleinste Vielfache dieser Zahl, welches den Ausdruck noch positiv macht. Schliesslich wird dieser Ausdruck einmal gerade $= 0$ werden, was dann und nur dann eintritt, wenn der Nullpunkt ausgeschieden wird.

Das Verfahren gestaltet sich hiernach am bequemsten nach folgender Regel¹⁾:

Man schreibe die Zahlen $n, n - 1, n - 2 \dots$ nebeneinander hin und setze unter n die Zahl ν , unter $n - 1$ die Zahl $\nu - d$, unter $n - 2$ die Zahl $\nu - 2d$ u. s. w., indem man fortgesetzt d subtrahiert. Sobald eine der Differenzen negativ werden würde, füge man zu der vorhergehenden Zahl der unteren Reihe so oft die über ihr stehende Zahl hinzu, daß, wenn man nun das Subtrahieren fortsetzt, eine positive Zahl herauskommt, die höchstens gleich der Zahl ist, unter die sie gehört. Dieses Verfahren führt schliesslich in der unteren Reihe zu der Zahl Null, und die Anzahl der in der unteren Reihe stehenden Zahlen bis zu 0 excl. ist die gesuchte Zahl e .

Beispiel:

$$n = 15, d = 7, \nu = 9.$$

$$15, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.$$

$$9, 2, 9, 2, 7, 0.$$

Unter $n = 15$ ist $\nu = 9$ geschrieben, von ν wird $d = 7$ subtrahiert und der Rest 2 daneben geschrieben, hierzu, da eine weitere Subtraktion von 7 zu einer negativen Zahl führen würde, die darüberstehende Zahl 14 addiert und dann 7 subtrahiert u. s. w.; e ist also $= 5$.

§ 3. Oberreihen.

Für die weitere Behandlung unseres Problems bedürfen wir gewisser Reihen, welche von Herrn Schubert eingeführt²⁾ und durch Herrn

1) s. Busche, l. c. p. 106.

2) Solche Reihen finden sich auch — unabhängig von Schubert —

Busche eine allgemeinere Form erhalten haben. Wir definieren als eine „Oberreihe mit dem Anfangsglied a , dem Summanden s und dem Quotienten q “ folgende Reihe:

$$(a, s, q) = [a], [(s + [a])q], [(s + [(s + [a])q])q] \dots,$$

wo a, s, q irgend welche reelle Zahlen sind und durch $[x]$, falls x eine ganze Zahl ist, diese, sonst aber die zu x nächst größere ganze Zahl charakterisiert werden soll, so zwar, daß eckige Klammern fortan nur in dieser Bedeutung gebraucht werden sollen¹⁾, während runde die gewöhnliche Bedeutung der Klammern beibehalten. Eine Oberreihe besteht hier nach aus lauter ganzzahligen Gliedern und zwar in dem für uns nur in Betracht kommenden Fall, daß $a > 0$, $s \geq 0$ und $q > 1$ ist, aus lauter positiven, beständig zunehmenden ganzen Zahlen; in diesem Fall nehmen, wenn man die Reihe der Differenzen je zweier aufeinanderfolgender Glieder bildet, die Zahlen dieser Reihe jedenfalls nicht ab. Ist t irgend ein Glied der Oberreihe, so ist das darauffolgende $[(s + t)q]$. So lautet z. B. die Oberreihe

$$\left(1, 3, \frac{4}{3}\right) = 1, 6, 12, 20 \dots$$

Wir stellen nun zunächst einige Sätze über Oberreihen auf, von denen wir später Gebrauch machen werden:

I. Zu jeder Oberreihe (a, s, q) lassen sich stets unendlich viele andere mit demselben Quotienten so angeben, daß die Glieder der einen Reihe um dieselbe konstante Zahl größer sind als die entsprechenden der anderen, also die Differenz zwischen je zwei Gliedern in der einen Reihe dieselbe ist wie die zwischen den entsprechenden einer anderen. Eine solche Reihe läßt sich bilden mit beliebig vorgeschriebenem Anfangsglied; für den Fall einer Reihe mit ganzzahligem Summanden s und einem Quotienten von der Form $q = \frac{d}{d-1}$ (d ganzzahlig) läßt sich eine solche zweite Oberreihe jedenfalls auch mit beliebig vorgeschriebenem ganzzahligem Summanden, also auch insbesondere mit dem Summanden 0 bilden; im letzteren Falle sind die Glieder der zweiten Reihe um $d \cdot s$ größer als die entsprechenden der ursprünglichen.

Es seien (a, s, q) und (A, S, q) 2 Oberreihen mit demselben Quotienten q ; es werde $[A] - [a] = x$ und $s - S = y$ gesetzt. Alsdann sind

in den schon erwähnten Noten von Cesàro (Intermédiaire des mathématiciens t. I, 1894, p. 30—31) und Franel (ibidem t. I, p. 31; t. II, p. 122).

1) Da Verwechslungen hier ausgeschlossen sind, acceptieren wir diese von Herrn Busche angewandte Bezeichnungsweise, obwohl ja sonst, wie auch in diesem Buche an einigen Stellen unter $[x]$ die der Bedingung $[x] \leq x < [x] + 1$ genügende ganze Zahl verstanden wird.

die Glieder der einen Reihe alle um die konstante Zahl x größer als die der anderen, wenn x und y der Bedingung genügen:

$$x \left(1 - \frac{1}{q}\right) = y.$$

Sind nämlich t und t' irgend 2 aufeinanderfolgende Glieder der einen und T, T' die entsprechenden Glieder der anderen Oberreihe, d. h. also

$$\begin{aligned} t' &= [(t + s) q] \\ T' &= [(T + S) q] \end{aligned}$$

und ist für die Glieder t und T die Differenz noch $= x$, wie bei den beiden Anfangsgliedern der Reihe, also $T = t + x$, so ist

$$T' = [(t + x + S) q] = [(t + x + s - y) q]$$

und der obigen Bedingungsleichung wegen:

$$T' = \left[\left(t + s + \frac{x}{q} \right) q \right],$$

also, weil x eine ganze Zahl ist:

$$T' = [(t + s) q] + x = t' + x$$

d. h. dann unterscheiden sich auch die folgenden Glieder noch um die konstante Zahl x ; für die Anfangsglieder beider Reihen war dies nun aber der Fall und damit ist es also allgemein bewiesen. x und y sind nur einer Gleichung unterworfen, so zwar, daß x offenbar beliebig ganzzahlig und damit das Anfangsglied der zweiten Reihe überhaupt ganz beliebig angenommen werden darf, so daß also Reihen mit jedem ganzzahligen Unterschied der Glieder möglich sind.

Ist weiter $q = \frac{d}{d-1}$ (d eine ganze Zahl), ein Fall, welcher später für uns besondere Bedeutung erlangen wird, so lautet unsere zwischen x und y bestehende Bedingungsleichung: $x = dy$, so daß bei beliebigem ganzzahligem y , also jedenfalls bei ganzzahligem s und beliebigem, wenn nur ganzzahligem S sich x stets ganzzahlig ergibt. Für $S = 0$ ist insbesondere $x = ds$.

II. Zu einem beliebigen unechten Bruch $q = \frac{m}{n}$ (m und n relativ prim) lassen sich stets $m - n$ Zahlen aus der Reihe $1 \dots m - 1$ so auswählen, daß, wenn man mit diesen $m - n$ Zahlen als Anfangsgliedern arithmetische Reihen von der Differenz m bildet und dann mit allen Zahlen dieser Reihen als Anfangsgliedern Oberreihen vom Quotienten $q = \frac{m}{n}$ und dem Summanden 0 , man jede Zahl in diesen Oberreihen ein-, aber auch nur einmal erhält.¹⁾

1) Dieser Satz wurde für den Fall $m - n = 1$ zuerst von Herrn Schubert (Mitteilungen der mathem. Gesellsch. zu Hamburg Bd. III p. 223)

Die Größe $b = \left[a \cdot \frac{m}{n} \right]$ können wir uns aus a so gefunden denken, daß zu $a \cdot m$ eine Zahl $k < n$ so addiert wird, daß $a \cdot m + k \equiv 0 \pmod{n}$ wird; alsdann ist $b = \frac{a \cdot m + k}{n}$. Umgekehrt ergibt sich a aus b wieder, indem von $b \cdot n$ eine Zahl $k < n$ subtrahiert wird, so daß $b \cdot n - k \equiv 0 \pmod{m}$ ist; alsdann ist $a = \frac{b \cdot n - k}{m}$. Man sieht hieraus sofort, daß beide Operationen, die „ursprüngliche“ und die „inverse“, eindeutig sind, daß aber die letztere nicht notwendig ausführbar ist, daß dies vielmehr nur für diejenigen Zahlen b der Fall ist, deren n -faches einen Rest mod m gibt, welcher $< n$ ist. Wir wollen solche Zahlen einmal „reduzierbare“ und diejenigen, deren n -faches mod m einen Rest $\geq n$ läßt, auf welche also die inverse Operation nicht anwendbar ist, „unreduzierbare“ nennen. Man sieht sofort, daß von zwei mod m kongruenten Zahlen entweder beide reduzierbar oder beide unreduzierbar sind. Werden also alle Zahlen in m arithmetische Reihen, jede von der Differenz m , angeordnet, so wird jede der Reihen entweder nur reduzierbare oder nur unreduzierbare Zahlen enthalten. Die Trennung derselben ergibt sich leicht folgendermaßen: Man nehme die Zahlen $1 \dots m$ und bestimme die kleinsten Reste ihrer n -fachen Werte mod m , welche ja ein vollständiges Restsystem mod m bilden; dann sind diejenigen Zahlen, für welche diese Reste $0, 1 \dots n - 1$ sind, die Anfangsglieder der arithmetischen Reihen der reduzierbaren, die $m - n$ anderen dagegen die Anfangsglieder der arithmetischen Reihen der unreduzierbaren Zahlen.

Berücksichtigt man, daß jede reduzierbare Zahl durch ein- oder mehrmalige Anwendung der inversen Operation bei deren Eindeutigkeit auf eine bestimmte unreduzierbare Zahl führen, sich also durch ein- oder mehrmalige Anwendung der ursprünglichen Operation aus einer unreduzierbaren Zahl ergeben muß, so sieht man, daß, wenn jede Zahl dieser $m - n$ arithmetischen Reihen unreduzierbarer Zahlen als Anfangsglied einer Oberreihe vom Quotienten q und dem Summanden 0 genommen wird, in diesen Oberreihen jede Zahl der Zahlenreihe gerade einmal erhalten wird.

Wir fügen noch kurz ein Beispiel hierfür hinzu: $m = 7, n = 5$. Da die 5-fachen Werte der Zahlen:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

nach 7 die kleinsten Reste:

ausgesprochen und dazu von Herrn Busche der Beweis geliefert (ibid. p. 225). Die obige allgemeinere Form rührt von dem Verfasser her (Zeitschr. für Math. u. Phys. 1895, p. 245).

5, 3, 1, 6, 4, 2, 0

ergeben, so liefern die Reihen

1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50 . . .

4, 11, 18, 25, 32, 39, 46 . . .

alle unreduzierbaren Zahlen. Diese Zahlen müssen daher als Anfangsglieder von Oberreihen gewählt werden, um jede Zahl gerade einmal zu erhalten, wie nachstehende Tabelle zeigt:

1, 2, 3, 5, 7, 10, 14, 20, 28, 40 . . .

4, 6, 9, 13, 19, 27, 38 . . .

8, 12, 17, 24, 34, 48 . . .

11, 16, 23, 33, 47 . . .

15, 21, 30, 42 . . .

18, 26, 37 . . .

22, 31, 44 . . .

25, 35, 49 . . .

29, 41 . . .

32, 45 . . .

36 . . .

39 . . .

43 . . .

46 . . .

50 . . .

§ 4. Die Busche'sche Lösung.

Aus dem in § 2 angegebenen Schema zur Ermittlung von e aus ν und umgekehrt leitet Herr Busche nun mit Hilfe des Begriffes „Oberreihe“ folgenden Satz her:

Die Nummer ν des Punktes, der aus n Zahlen durch Abzählen bis d als der e -te ausscheidet, ist gleich dem Überschufs von $de + 1$ über das letzte Glied der Oberreihe $\left(1, n - e, \frac{d}{d-1}\right)$, das noch kleiner als $de + 1$ ist.

In dem Beispiel des § 2 würde also die Oberreihe

$$\left(1, 10, \frac{7}{6}\right) = 1, 13, 27, 44 \dots$$

in Betracht kommen; das letzte Glied, welches noch kleiner als $de + 1 = 36$ ist, ist 27 und der Überschufs von 36 über dieses = 9, also $\nu = 9$. — Sprechen wir nun im folgenden, um eine Verwechslung mit den jetzigen Oberreihen zu vermeiden, von den beiden Reihen des in § 2 gegebenen Schemas als der „Reihe I“, worunter wir die obere, und der „Reihe II“, worunter wir die untere der beiden verstehen, so ergeben sich die Zahlen der Reihe II aus denen von I ohne Kenntnis des Wertes von ν

offenbar in der Weise, daß man unter die Zahl $(n - e)$ von I zunächst 0 schreibt und dann hierzu von Zahl zu Zahl in der Richtung von rechts nach links je d addiert, wobei jedesmal, wenn die Zahl von II größer als die darüberstehende von I werden würde, die letztere so oft von der ersteren abzuziehen ist, bis die Zahl der Reihe II gleich oder kleiner als die darüberstehende von I, aber > 0 ist. Dabei scheint zunächst noch jedes Kriterium zu fehlen, das uns ermöglichte, ohne Ausführung dieser einzelnen Operationen von vornherein anzugeben, welche Zahlen von I hierbei zu subtrahieren sind, bzw. wie oft dies mit den einzelnen zu geschehen hat; jedoch werden wir sehen, daß jedes Glied unserer Oberreihe, um das Anfangsglied 1 derselben vermindert, gerade gleich der Summe aller derjenigen aus der Reihe I genommenen Zahlen ist, welche in dem dortigen Schema — von rechts nach links gerechnet — bis zu der betreffenden Stelle insgesamt schon subtrahiert sein müssen, damit man das betreffende Glied der Reihe II bekommt. Danach gäbe uns die Oberreihe unseres Beispiels also an, daß zunächst (rechts) in dem zugehörigen Schema $13 - 1 = 12$ subtrahiert wird, was auch tatsächlich der Fall ist, da $7 + 7 - 12 = 2$ ist; das zweite Glied der Oberreihe, vermindert um 1, also 26, gäbe uns die Summe dieser 12 und der dann zu subtrahierenden Zahl, d. h. also 14, was wiederum unser Schema bestätigt. Man brauchte also nur die Differenzen von je 2 aufeinanderfolgenden Gliedern der Oberreihe zu nehmen und erhielte so alle Zahlen der Reihe I, welche subtrahiert werden müssen, damit man die Zahlen der Reihe II erhält. Sind p Differenzen der Oberreihe hintereinander $= k$, so würde dies bedeuten, daß das p -fache der Zahl k der Reihe I zu subtrahieren ist. Da nun in unserer Oberreihe das erste Glied mit sich selbst natürlich die Differenz 0 hat, andererseits aber, wenn wir in der Reihe II auch noch die 0 unter dem $(n - e)$ der Reihe I mitrechnen, jedenfalls unsere Aussage für diese erste Differenz der Oberreihe erfüllt ist, weil ja von der 0 in II stets 0 zu subtrahieren ist, so liegt es nahe, den Versuch eines Beweises durch Schluß von n auf $n + 1$ zu machen.

Nehmen wir nämlich an, daß man die Differenzen der Oberreihe bereits bis zu der Zahl $n - e + \lambda$ der Reihe I in Übereinstimmung mit dem Verfahren des § 2 gefunden hat ($\lambda \geq 1$), so unterscheiden wir nun 2 Fälle, nämlich 1) daß man, um das betreffende Glied der Reihe II zu bekommen, $n - e + \lambda$ ein- oder mehrere Male zu subtrahieren hat und 2) daß eine solche Subtraktion nicht erforderlich ist. Die Zahl der Reihe II, welche für den Platz unter $n - e + \lambda$ bisher berechnet ist, sei in der Form $d \cdot \lambda - (t - 1)$ geschrieben, weil ja d bereits λ -mal addiert ist; dann ist $t - 1$ die Summe aller bisher subtrahierten Zahlen der Reihe I, also nach unserer Annahme t das betreffende Glied der ja mit 1 beginnenden Oberreihe. Dabei soll es unentschieden bleiben,

ob bereits eine ein- oder mehrmalige Subtraktion von $n - e + \lambda$ erfolgt ist. Wir setzen nur voraus, daß die fragliche Zahl jetzt noch größer ist als $n - e + \lambda$, also jedenfalls mindestens noch einmal um diese Größe verkleinert werden muß, so daß offenbar also, wenn unsere Behauptung richtig ist, das nächste Glied der Oberreihe, d. h.

$$t' = \left[(n - e + t) \frac{d}{d-1} \right]$$

um $n - e + \lambda$ größer als t sein muß. Wir setzen nun $t = d(\lambda - 1) + r$; dann ist, weil $\left[x \frac{d}{d-1} \right]$ offenbar $= x + \left[\frac{x}{d-1} \right]$ bei ganzzahligem x ist:

$$\begin{aligned} t' &= n - e + t + \left[\frac{n - e + t}{d - 1} \right] \\ &= n - e + t + \left[\frac{n - e + d(\lambda - 1) + r}{d - 1} \right], \end{aligned}$$

also

$$t' - t = n - e + \lambda - 1 + \left[\frac{n - e + \lambda - 1 + r}{d - 1} \right],$$

und es handelt sich also nur noch um die Bestimmung dieses Klammerausdrucks, der sich, wenn unsere Behauptung $t' - t = n - e + \lambda$ richtig sein soll, $= 1$ ergeben müßte. Es ist nun nach unserer Annahme

$$d\lambda - (t - 1) > n - e + \lambda$$

oder

$$d\lambda + 1 - d(\lambda - 1) - r > n - e + \lambda$$

oder

$$d > n - e + \lambda - 1 + r.$$

Andererseits ist der größtmögliche Wert von $d\lambda - (t - 1)$, nämlich dann, wenn $n - e + \lambda$ noch gar nicht subtrahiert ist, gleich dem rechts vorhergehenden Glied der Reihe II, vermehrt um d ; das vorhergehende Glied der Reihe II ist aber $\leq n - e + \lambda - 1$, also

$$d\lambda - (t - 1) \leq n - e + \lambda - 1 + d$$

oder

$$d + 1 - r \leq n - e + \lambda - 1 + d$$

$$1 \leq n - e + \lambda - 1 + r.$$

Der Wert $n - e + \lambda - 1 + r$ liegt also zwischen den Grenzen 1 und d , ohne die obere Grenze d erreichen zu können, dann ist aber

$$\left[\frac{n - 1 + \lambda - 1 + r}{d - 1} \right] = 1,$$

womit für unseren ersten Fall der Beweis erbracht ist. Man findet also jedenfalls die in Reihe II unter $n - e + \lambda$ stehende Zahl mittelst der Oberreihe und zwar, indem man das größte Glied derselben, welches noch $< d\lambda + 1$ ist, von $d\lambda + 1$ subtrahiert. Ist dieses Glied etwa $t^{(q)}$, also $0 < d\lambda + 1 - t^{(q)} \leq n - e + \lambda$, so ist, da die Differenzen zwischen 2

aufeinanderfolgenden Gliedern der Oberreihe jedenfalls nicht abnehmen (s. S. 292), das nächste Glied der Oberreihe mindestens um $n - e + \lambda$ größer als $t^{(e)}$; es würde also

$$d\lambda + 1 - t^{(e+1)}$$

schon negativ sein und, wenn man das vorhergehende $t^{(e-1)}$ nähme, die Differenz $d\lambda + 1 - t^{(e-1)} > n - e + \lambda$ sein.

Gehen wir jetzt zu dem zweiten Fall über, daß das mit Hilfe des Gliedes t der Oberreihe noch richtig bestimmbare Glied der Reihe II, d. h. also $d\lambda - (t - 1)$, schon kleiner als $n - e + \lambda$ ist und daß man dann noch $\sigma \geq 0$ weitere Glieder der Reihe II durch einfache Addition von d hieraus bilden kann, ohne eine der darüberstehenden Zahlen abziehen zu müssen, so daß also unter

$$n - e + \lambda \quad n - e + \lambda + 1 \quad \dots \quad n - e + \lambda + \sigma$$

die Zahlen

$$d\lambda + 1 - t \quad d(\lambda + 1) + 1 - t \quad \dots \quad d(\lambda + \sigma) + 1 - t^*$$

zu setzen sind, daß dann aber das folgende Glied

$$d(\lambda + \sigma + 1) + 1 - t > n - e + \lambda + \sigma + 1$$

ist, so wird unsere Aufgabe offenbar darin bestehen, zu zeigen, daß das auf t folgende Glied unserer Oberreihe gerade um $n - e + \lambda + \sigma + 1$ größer ist als t . Nennen wir dasselbe wieder t' , so haben wir wie oben:

$$t' - t = n - e + \lambda - 1 + \left[\frac{n - e + \lambda - 1 + r}{d - 1} \right].$$

Nun ist

$$d(\lambda + \sigma) + 1 - t \leq n - e + \lambda + \sigma$$

und

$$d(\lambda + \sigma + 1) + 1 - t > n - e + \lambda + \sigma + 1.$$

Diese beiden Ungleichungen nehmen aber, da $t = d(\lambda - 1) + r$ gesetzt war, die Form an:

$$d(\sigma + 1) - \sigma \leq n - e + \lambda - 1 + r$$

und

$$d(\sigma + 2) - \sigma - 1 > n - e + \lambda - 1 + r,$$

also

$$d(\sigma + 1) - \sigma \leq n - e + \lambda - 1 + r < d(\sigma + 2) - \sigma - 1$$

oder

$$(d - 1)(\sigma + 1) + 1 \leq n - e + \lambda - 1 + r < (d - 1)(\sigma + 2) + 1,$$

also

$$\left[\frac{n - e + \lambda - 1 + r}{d - 1} \right] = \sigma + 2,$$

*) Im Vergleich mit dem Schema in § 2 ist hier die Reihenfolge der Glieder gerade umgekehrt.

d. h.

$$t - t = n - 1 + \lambda + \sigma + 1.$$

Damit ist offenbar der Beweis für die Richtigkeit des Busche'schen Verfahrens geliefert.

§ 5. Das Verfahren Schubert's.

Zur Bestimmung der Zahl ν aus der Platznummer d gebraucht Herr Busche, wie wir im vorigen § sahen, die Oberreihe

$$\left(1, n - e, \frac{d}{d-1}\right);$$

bei dieser Bestimmung waren wesentlich die Unterschiede zwischen den benachbarten Gliedern der Oberreihe, und wir können daher auf Grund unseres Satzes I in § 3 uns diese Oberreihe ersetzt denken durch eine andere, deren aufeinanderfolgende Glieder dieselben Differenzen haben, bei der aber der Summand den für die Rechnung bequemsten Wert 0 hat. Auf Grund des erwähnten Satzes ist dies die Oberreihe

$$\left(d(n - e) + 1, 0, \frac{d}{d-1}\right).$$

Da alle Glieder jetzt um $d(n - e)$ größer sind als zuvor, so werden wir nicht mehr, wie in § 4, den Überschuss von $de + 1$ über das größte, noch unterhalb $de + 1$ liegende Glied der Oberreihe, sondern jetzt den von

$$de + 1 + d(n - e) = dn + 1$$

über das größte Glied der Oberreihe, das noch unterhalb dieser Zahl liegt, zu bilden haben. Wir erhalten so folgende weitere Vorschrift:

Die Nummer ν des Punktes, der aus n Punkten durch Abzählen bis d als der e -te ausscheidet, ist gleich dem Überschuss von $dn + 1$ über das größte Glied der Oberreihe

$$\left(d(n - e) + 1, 0, \frac{d}{d-1}\right),$$

das noch kleiner als $dn + 1$ ist.¹⁾

Für unser obiges Beispiel $n = 15$, $d = 7$, $e = 5$ ist also die Oberreihe

$$\left(71, 0, \frac{7}{6}\right) = 71, 83, 97, 114 \dots$$

zu bilden, und das größte, unterhalb $dn + 1 = 106$ liegende Glied, also 97, unterscheidet sich hiervon um 9, so daß $\nu = 9$ ist.

Dies ist die ursprünglich von Herrn Schubert gefundene Methode, welche Herrn Busche den Weg zu seinem Verfahren gewiesen hat.²⁾

1) s. Busche, Mathem. Annal. Bd. 47, p. 111.

2) s. Busche, l. c. p. 112.

Herr Schubert wiederum ist hierzu, wie schon oben bemerkt, durch eine induktiv gefundene Rekursionsformel gelangt, welche sich jetzt a posteriori leicht folgendermassen ergibt: Bezeichnen wir das zu den Werten n, e, d zugehörige ν durch $\nu(n, e, d)$, so wird die Bestimmung unseres ν nach dem obigen Satze von Schubert durch die Oberreihe

$$\left(d(n - e) + 1, 0, \frac{d}{d-1}\right)$$

geleistet. Dieselbe Oberreihe gehört aber auch zu $\nu(n+1, e+1, d)$ und allgemein zu $\nu(n+i, e+i, d)$, nur dafs man, um $\nu(n+1, e+1, d)$ zu finden, das betreffende Glied der Oberreihe nicht von $dn+1$, sondern von $d(n+1)+1$ abzuziehen hat, so dafs $\nu(n+1, e+1, d)$ zunächst also um d gröfser als $\nu(n, e, d)$ erscheint. Da nun die Oberreihen für $\nu(n, e, d)$ und $\nu(n+1, e+1, d)$ übereinstimmen, so sind also die Zahlen $n-e+1, n-e+2 \dots n$ in dem Sinne des in § 2 gegebenen Schemas in beiden Fällen gleich oft abzuziehen, nur endigt in dem zweiten Falle die Reihe I links erst mit $n+1$ statt n , und es ist daher möglich, dafs auch diese Zahl noch ein- oder mehrere Male abzuziehen ist, mithin in der Oberreihe jetzt ein späteres Glied in Betracht käme als zuvor. Es ergibt sich hieraus offenbar, dafs

$$\nu(n+1, e+1, d) = \nu(n, e, d) + d - \varepsilon(n+1)$$

ist, wo ε eine positive ganze Zahl ≥ 0 ist.

In Worten ausgesprochen bedeutet diese Rekursionsformel:

Die Nummer ν des Punktes, der aus n Punkten durch Abzählen bis d als der e -te ausscheidet, giebt, wenn man d dazu addiert und, falls diese Summe gröfser als $n+1$ ist, letztere Zahl so oft subtrahiert, dafs ein positiver Rest $\leq n+1$ bleibt, die Nummer ν des Punktes, der aus $n+1$ Punkten durch Abzählen bis d als der $(e+1)$ -te ausscheidet.¹⁾

Unser obiges Beispiel hatte uns gezeigt, dafs als 5-ter Punkt unter 15 durch Abzählen bis 7 der Punkt 9 ausscheidet; wir sehen hieraus jetzt sofort, dafs unter 16 Punkten durch Abzählen bis 7 als 6-ter Punkt der Punkt $9 + 7 = 16$ ausscheidet.

Wenn es sich um die Bestimmung der Werte ν zu den verschiedenen $e=1, 2 \dots n$ bei demselben d handelt, so sind hierfür nach dem Obigen also die Oberreihen

$$\left(d(n-1) + 1, 0, \frac{d}{d-1}\right), \left(d(n-2) + 1, 0, \frac{d}{d-1}\right) \dots \left(1, 0, \frac{d}{d-1}\right)$$

zu bilden, und dann ist von jeder das betreffende Glied aufzusuchen

1) Ein Spezialfall dieser Formel, nämlich für $e = n - 1$ war — unabhängig von Schubert — von den Herren Delannoy (Intermédiaire des mathématiciens t. II, 1895, p. 120/121) und Moreau (ibidem, t. II, 1895, p. 229) angegeben worden.

und von der für alle diese Fälle gleichen Zahl $dn + 1$ zu subtrahieren. Als Postulat ergibt sich also, daß in diesen Oberreihen jedenfalls die Zahlen $dn, dn - 1, \dots, dn - (n - 1)$ alle gerade einmal auftreten müssen, da ja jeder Punkt bei dem Abzählverfahren einmal ausscheidet. In der That wissen wir nach Satz II des § 3, daß in diesen n Oberreihen jedenfalls schon alle Zahlen von 1 bis dn incl. einmal, aber auch nur einmal vorkommen.

Zum Schluß mag noch darauf hingewiesen werden, daß für einen besonderen Fall, nämlich $d = 2$, unsere Oberreihe eine gewöhnliche geometrische Reihe wird, weil dann $\frac{d}{d-1}$ ganzzahlig, nämlich $= 2$ wird.

Kapitel XVI.

Einiges aus der Analysis situs.

Je croy qu'il nous faut encor une autre analyse proprement geometrique ou lineaire qui nous exprime directement situm, comme l'algebre exprime magnitudinem.

LEIBNIZ, Brief an Huygens vom 8. IX. 1679
(Mathem. Schrift., herausg. v. Gerhardt, Abt. I,
Bd. II, Berlin 1850, p. 19).

Der berühmte Leibnitz besaß viel wirkliche Einsichten, wodurch er die Wissenschaften bereicherte, aber noch viel größere Entwürfe zu solchen, deren Ausführung die Welt von ihm vergebens erwartet hat. Zum wenigsten hat es den Anschein, daß eine gewisse mathematische Disziplin, welche er zum voraus Analysis situs betitelt, wohl niemals etwas mehr als ein Gedankending gewesen sei.

KANT, „Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume.“ Werke, herausgeg. v. Hartenstein II, 1:67, p. 365.

Von der Geometria situs, die Leibnitz ahnte, und in die nur einem Paar Geometern (Euler und Vandermonde) einen schwachen Blick zu thun vergönnt war, wissen und haben wir nach anderthalbhundert Jahren noch nicht viel mehr wie nichts.
GAUSS, Werke V, p. 605.

The subject is one of very great importance, and has been recognized as such by many of the greatest investigators, including Gauss and others.

Tait. Philos. Magaz. 1884, I, p. 30.

§ 1. Liniensysteme.

Als ein „Liniensystem“¹⁾ sei definiert eine Mannigfaltigkeit von beliebig geformten Linien im Raume von der Beschaffenheit, daß es möglich ist, von jeder Stelle auf einer Linie des Systems zu irgend einer anderen solchen Stelle zu ge-

1) Diese Bezeichnung, welche u. a. auch Lippich, „Bemerkung zu einem Satze aus Riemann's Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Größe“, Wiener Sitzungsber. Bd. LXIX Abt. II, 1874, p. 91 ff. gebraucht, erscheint mir zweckmäßiger als die von Listing, „Vorstudien zur Topologie“ in Göttinger Studien 1847, Abt. I, p. 867 ein-

langen auf einem Wege, welcher ausschliesslich aus Linien des Systems besteht. Während man im allgemeinen von einer Stelle in dem System in zwei verschiedenen Richtungen ausgehen kann, sind diejenigen Stellen ausgezeichnet, von denen aus dies nur in einer oder andererseits in 3 resp. mehr Richtungen möglich ist. Wir bezeichnen diese ausgezeichneten Stellen des Systems kurz als seine „Punkte“ und zwar diejenigen, welche man nur in einer Richtung verlassen kann, als „Endpunkte“ und diejenigen, von welchen man in 3 oder mehr Richtungen ausgehen kann, als „Kreuzungspunkte“. Ein System ohne Endpunkte wollen wir ein „geschlossenes“ nennen. Genetisch können wir ein Liniensystem offenbar auch definieren als eine Mannigfaltigkeit von Punkten, welche durch beliebig geformte Linien miteinander verbunden sind, so zwar, daß von jedem dieser Punkte mindestens 3 Linien oder aber nur eine ausgehen und man von einem beliebigen dieser Punkte durch die Linien des Systems zu jedem anderen Punkte des Systems gelangen kann. Wir verstehen alsdann unter einer „Linie“ immer nur das Stück von einem Punkte des Systems bis zum nächsten und bezeichnen einen Punkt, in dem $n \geq 3$ Linien münden, als einen Kreuzungspunkt $(n - 2)$ -ter Ordnung und einen solchen, von dem nur eine Linie ausgeht, als einen Endpunkt. Besteht ein System nun aus e Endpunkten, k_3 Kreuzungspunkten erster Ordnung, k_4 solchen zweiter Ordnung . . . k_l von der $(l - 2)$ -ten Ordnung, so ist offenbar die Anzahl n der Linien des Systems gegeben durch die Formel:

$$(1) \quad n = \frac{e + \sum_3^l i k_i}{2},$$

während

$$(2) \quad m = e + \sum_3^l k_i$$

geführte „Linearkomplexion“, da man bekanntlich unter „linearem Komplex“ jetzt etwas wesentlich anderes versteht; charakteristisch und brauchbar wäre auch „Linienkontinuum“.

die Gesamtanzahl der Punkte (End- und Kreuzungspunkte) angiebt.

Die Formel (1) involviert die bekannte Eigenschaft eines Liniensystems, daß die Anzahl der Endpunkte und der Kreuzungspunkte ungerader Ordnung zusammengenommen stets eine gerade Zahl ist. Für „geschlossene Systeme“, mit denen wir es in erster Linie hier zu thun haben, lauten die obigen Formeln:

$$(1^a) \quad n = \frac{1}{2} \sum_3^i i k_i$$

$$(2^a) \quad m = \sum_3^i k_i.$$

Sind die Ordnungszahlen der m Punkte des geschlossenen Systems bezw. $r_1, r_2 \dots r_m$, wo dann unter diesen r gleiche Zahlen vorkommen können, so ist offenbar:

$$(1^b) \quad n = \sum_1^m \frac{(r_p + 2)}{2} = \frac{1}{2} \sum_1^m r_p + m,$$

eine Formel, welche unter Umständen bequemer ist als die obige.

§ 2. Bäume.

Wenn es möglich ist, durch Fortnahme einer Linie ein Liniensystem so zu verändern, daß man nicht mehr von jedem Punkte des Systems zu jedem anderen gelangen kann, so sagen wir: „das System zerfällt durch Fortnahme dieser Linie“ und nennen diese Linie dann eine „Brücke“ des Systems. Wir erhalten durch Fortnahme einer solchen Brücke 2, aber auch nicht mehr getrennte Teile, welche, jeder für sich, wieder Liniensysteme sind; allgemein kann durch Fortnahme von a Linien ein Liniensystem höchstens in $a + 1$ getrennte Teile zerfallen, welche dann, jeder für sich, Liniensysteme sind. Wir wollen nun, beginnend in einem beliebigen Punkte des Systems, von den von diesem Punkte ausgehenden Linien so viele als möglich entfernen, ohne daß das System zerfällt,

d. h. also z. B., wenn von diesem Punkte keine Brücke ausgeht, alle Linien bis auf eine. Alsdann gehen wir längs der übrig bleibenden Linien zu den Nachbarpunkten und machen hier dasselbe u. s. w. Schliesslich wird das System den, wie wir sagen wollen, „baumförmigen Typus“¹⁾ angenommen haben, d. h. eine Form, bei der das System noch zusammenhängt, so dass man nach wie vor von einem Punkte des Systems zu jedem anderen gelangen kann, bei der es aber unmöglich ist, auch nur eine geschlossene, zum Ausgangspunkt zurückführende Bahn zu beschreiben. Es ist nun leicht ersichtlich, dass zwischen m Punkten höchstens $m - 1$ Verbindungslinien existieren dürfen, ohne dass eine geschlossene Bahn besteht, dass aber in dem Falle eines „Baumes“, wie wir fortan kurz sagen wollen, auch gerade diese Maximalzahl erreicht wird, mithin, um das ursprüngliche System in diese Form überzuführen, $n - m + 1$ Linien desselben fortgenommen werden müssen, eine für das Liniensystem besonders charakteristische Konstante, welche wir im folgenden immer mit μ bezeichnen wollen und welche nach § 1 (1^b) zweckmässig nach der Formel

$$\mu = \frac{1}{2} \sum_1^m r_p + 1$$

berechnet wird.

Die Operation der Überführung eines beliebigen Liniensystems in den baumförmigen Typus kann natürlich auf sehr viele verschiedene Arten bewerkstelligt werden. Die Grösse μ jedoch, welche die Anzahl der hierfür zu entfernenden Linien angiebt, ist für jedes System eine Invariante.

1) Diese geometrischen Gebilde sind vor allem behandelt von Cayley, welcher sie „Trees“ nennt (Phil. Mag. XIII, 1857; XVIII, 1859; XLVII, 1874; British Association Report 1875; Amer. Journ. of Mathem. IV, 1881; Quart. Journ. of Math. XXIII, 1889; vgl. a. Philosoph. Transactions of the Royal Soc. vol. 158, 1868, p. 75 ff.), Polignac (Bull. de la soc math. de France VIII, 1880 und IX, 1881), Lucas (Récréat. math. t. I, 2^{ième} éd. p. 51), der die Bezeichnungen „ramification, arbre, arborescence“ gebraucht, weiter von Sylvester und Tebay (Educat. Times Repr. XXX, 1878), Mac Mahon (London Mathem. Soc. Proc. XXII, 1890/91), Delannoy (Assoc. franç. XXIII, Caen 1894) etc.

Hiernach sagen wir:

Satz I: *Um ein Liniensystem von n Linien und m Punkten in den baumförmigen Typus überzuführen, müssen $\mu = n - m + 1$ Linien desselben entfernt werden.*

Satz II: *Entfernt man aus einem System μ Linien, ohne daß dasselbe zerfällt, so wird es ein „Baum“.¹⁾*

Wir schließen diese Entwicklungen nicht, ohne zuvor noch eine wichtige Beziehung herzuleiten. Die verschiedenen Linien eines geschlossenen Systems teilen das ganze, eine Ebene bzw. krumme Fläche bildende Gebiet des Liniensystems in eine Anzahl kleinster, nicht weiter zerteilter Gebietsteile. Die Anzahl dieser so von den Linien des Systems eingefassten Gebietsteile nimmt offenbar durch Fortnahme je einer Linie immer um 1 ab und ist daher, da es beim „Baum“ solche allseitig begrenzte Gebiete nicht mehr giebt, $= \mu$.

Satz III: *In einem Liniensystem von n Linien und m Punkten giebt es $\mu = n - m + 1$ von den Linien des Systems allseitig begrenzte und nicht weiter zerteilte Gebiete.*

§ 3. Einiges aus der Morphologie der Polyeder.

Die über Liniensysteme hergeleiteten Sätze lassen leicht Anwendungen auf Polyeder zu, wenn wir uns das Polyeder

1) s. v. dem Verf. „Über das Gleichungssystem einer Kirchhoff'schen galvanischen Stromverzweigung.“ Math. Annal. Bd. 49, p. 315. Listing („Der Census räumlicher Komplexe.“ Göttinger Abhandl. 1861/62, p. 130) bezeichnet die Konstante μ als „cyklomatische Ordnungszahl“. Es sei hier noch nebenbei bemerkt, daß Untersuchungen, welche mit den obigen verwandt sind, wenn auch in wesentlich anderer Darstellung und Terminologie und in Hinsicht auf ein anderes Ziel, nämlich Anwendungen auf Substitutionentheorie, von Herrn Hoyer angestellt sind („Über den Zusammenhang in Reihen . . .“, Math. Ann. 42; „Über Riemann'sche Flächen mit beschränkt veränderlichen Verzweigungspunkten“ Math. Ann. 47; sowie besonders „Über Reihen, Liniengebilde und Substitutionen“ Progr. d. Gymnas. z. Burg 1897). Ferner mag bei dieser Gelegenheit hingewiesen werden auf die umfangreichen Untersuchungen über die Topologie Riemann'scher Flächen von Riemann, Lüroth, Clebsch, Durège, Lippich, Clifford, Bertini, Graf, Kasten, Hurwitz u. a.

durch ein geschlossenes Liniensystem ersetzt denken, so zwar, daß an die Stelle der Kanten des Polyeders Linien und infolgedessen an die Stelle einer Polyederecke, in der k Kanten zusammenstoßen, ein Kreuzungspunkt $(k - 2)$ -ter Ordnung tritt, schließlic an die Stelle der Flächen des Polyeders die am Ende des vorigen § besprochenen kleinsten Gebiete, wobei dann allerdings eine Polyederfläche durch das als eben angenommene Gebiet des ganzen Systems dargestellt gedacht werden muß. Bezeichnen wir die Anzahlen der Flächen, Ecken, Kanten des Polyeders bezw. mit F , E , K , so entsprechen offenbar die Größen $F - 1$, E , K den Größen μ , m , n in Satz III (§ 2), d. h. es ist

$$(F - 1) = K - E + 1 \quad \text{oder} \quad F + E = K + 2.$$

Es ist dies der bekannte Euler'sche Satz:

Satz IV: *In jedem konvexen Polyeder ist die Anzahl der Flächen und Ecken zusammen um 2 größer als die der Kanten.*¹⁾

1) Euler, Elementa doctrinae solidorum. Novi comm. Petropol. IV (ad annum 1752/53) 1758. Wie Baltzer („Zur Geschichte des Euler'schen Satzes von den Polyëdern.“ Monatsber. d. Berl. Akad. 1861, p. 1043—1046) bemerkt hat, stammt dieses Theorem jedoch schon von Descartes (s. Oeuvres inédites, herausgeg. v. Foucher de Careil, Paris 1860, t. II, p. 214). Zahlreiche, jedoch nicht immer wesentlich verschiedene Beweise sind für diesen Satz gegeben worden, u. a. von Legendre, Éléments de géométrie, 2^{ième} éd. Jahr VIII (der Revolution) p. 252/253 (Livre VII, Propos. XXV); Steiner, Crelle's Journal I, 1826, p. 364—367; Grunert, Crelle's Journal II, 1827, p. 367; Gergonne, Annales de mathém. XIX, 1828/29, p. 333—338; Langer, Progr. Leitmeritz 1873; Kirkman u. Booth, Educ. Times Reprints XX, p. 26—28; Schubert, Archiv der Math. u. Phys. Bd. 63, 1879, p. 93—100 etc. etc. Mit Erweiterungen des Euler'schen Satzes und der Feststellung seines Gültigkeitsbereiches beschäftigen sich L'huilier, Annales de Gergonne III, 1812/13, p. 169—189; Cauchy, Journ. de l'éc. polytechn. 1813, p. 76; Gergonne, Annales de mathém. IX, 1818/19, p. 321—345; Hessel, Crelle's Journal VIII, 1832, p. 13—20; Listing, Göttinger Abhandl. 1861; Cayley, Phil. Magaz. 1861 u. Messenger of Mathem. 1873; Godt, Progr. Lübeck 1881; Durège, Elem. d. Theorie d. Funkt. Leipzig 1882, p. 226—229; Halsted, Annals of Mathematics I, 1885, p. 138—139, vgl. a. Mathesis VI, 1886, p. 121; Perrin, Comptes rendus de Paris t. 110, 1890, p. 273—275; Eberhard,

Es sei f_i die Anzahl der Seitenflächen, welche i -Ecke sind, und e_i die Anzahl der i -kantigen Ecken, so dafs also

$$(1) \quad F = \sum_3^i f_i$$

$$E = \sum_3^i e_i \text{ und}$$

$$(2) \quad 2K = \sum_3^i i \cdot f_i = \sum_3^i i \cdot e_i$$

oder in anderer Form geschrieben:

$$2K = f_3 + f_5 + f_7 + \dots + 2(f_3 + 2f_4 + 2f_5 + 3f_6 + 3f_7 + \dots)$$

$$= e_3 + e_5 + e_7 + \dots + 2(e_3 + 2e_4 + 2e_5 + 3e_6 + 3e_7 + \dots)$$

ist. Hieraus folgt, wie oben (S. 304) entsprechend bei den Liniensystemen:

Satz V: *Die Ecken, von welchen eine ungerade Anzahl von Kanten ausgeht, sind stets in gerader Anzahl an einem Polyeder vertreten. Die Anzahl der Seitenflächen von ungerader Seitenzahl ist stets eine gerade.¹⁾*

Es ist nach (1) und (2)

$$2K - 4F = -f_3 + f_5 + 2f_6 + 3f_7 + \dots$$

Math. Ann. Bd. 36, 1890, p. 121—133; Poincaré (Ausdehnung auf n Dimensionen) Journ. de l'éc. polytechn. (2) I, 1895, p. 1—123 etc. Weitere ausführliche Angaben über die Litteratur des Euler'schen Satzes findet man in dem mir erst während der Drucklegung zu Gesicht gekommenen Werke von Max Brückner, „Vielecke und Vielfache“. Leipzig 1900, p. 58—66. Topologische Betrachtungen über Gebilde der physischen Geographie unter Benutzung des Euler-Listing'schen Satzes haben angestellt Cayley („On Contour and Slope Lines.“ Philosophical Magaz. 1859, series 4. vol. XVIII, p. 264—268 = Collect. Pap. IV, p. 108—111) und Clerk Maxwell („On Hills and Dales.“ Philosoph. Magaz. 1870, series 4, vol. XL p. 421—427 = Scientific papers, Cambridge 1890, II, p. 233—240), um Relationen zwischen den Anzahlen der Berge, Thäler, Pässe etc. eines Kontinents oder einer Insel zu gewinnen.

1) Legendre, *Éléments de géométrie*, übers. von A. L. Crelle, 2. Aufl., Berlin 1833, p. 308, Anm. 8; sowie Gergonne, *Annales de math.* XV, p. 160.

$$\text{und} \quad 2K - 4E = -e_3 + e_5 + 2e_6 + 3e_7 + \dots,$$

also

$$f_3 + e_3 = 4(F + E - K) + (f_5 + e_5) + 2(f_6 + e_6) + \dots$$

oder mit Benutzung des Euler'schen Satzes:

$$f_3 + e_3 = 8 + (f_5 + e_5) + 2(f_6 + e_6) + \dots;$$

es ergibt sich also:

Satz VI: Die Anzahl der dreiseitigen Flächen und dreikantigen Ecken eines Polyeders zusammen beträgt mindestens acht.¹⁾

Es ist weiter nach (1) und (2):

$$6F - 2K = 3f_3 + 2f_4 + f_5 - f_7 - 2f_8 - 3f_9 \dots$$

$$6F - 2E = 3e_3 + 2e_4 + e_5 - e_7 - 2e_8 - 3e_9 \dots,$$

also $3f_3 + 2f_4 + f_5 \geq 6F - 2K$ und

$$3f_3 + 3f_4 + 3f_5 \geq 6F - 2K$$

$$f_3 + f_4 + f_5 \geq \frac{6F - 2K}{3}$$

Da nun

$$E = \sum_3^i e_i$$

$$2K = \sum_3^i i e_i$$

ist, so muß

$$4K - 6E = \sum_3^i (2i - 6) e_i \text{ sein.}$$

Das erste Glied ($i = 3$) dieser letzteren Summe ist nun 0 die übrigen ≥ 0 , daher

$$4K - 6E \geq 0, \text{ also wegen}$$

$$6F - 2K = 12 + 4K - 6E \text{ (nach dem Euler'schen Satz):}$$

$$6F - 2K \geq 12 \text{ und daher}$$

$$f_3 + f_4 + f_5 \geq 4 \text{ und ebenso}$$

$$e_3 + e_4 + e_5 \geq 4 \text{ oder in Worten:}$$

Satz VII: Unter den Flächen (Ecken) eines beliebigen kon-

1) Gergonne, Annales de math. XV p. 162; vgl. a. Catalan, Mémoires sur la théorie des polyèdres. Journal de l'école polytechn. 41^{ième} cahier, t. XXIV, 1865, p. 5; sowie Eberhard, „Zur Morphologie der Polyeder.“ Leipzig 1891.

*vexen Polyeders gibt es wenigstens 4, welche weniger als 6-seitig (6-kantig) sind.*¹⁾

Wir wenden uns zu denjenigen Polyedern, welche seit jeher das größte Interesse erweckt haben, den regulären. Indem wir von der oben (S. 307) abgeleiteten Euler'schen Relation

$$F + E = K + 2$$

Gebrauch machen, gelingt es uns leicht, die verschiedenen Typen regulärer Polyeder aufzufinden. Stossen in jeder Ecke a Kanten zusammen und ist jede Fläche ein b -Eck, so ist offenbar

$$aE = bF = 2K,$$

also nach der Euler'schen Relation

$$2K \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = K + 2$$

$$K \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} - 1 \right) = 2.$$

Aus dieser Gleichung²⁾ folgt, daß a und b jedenfalls nicht beide ≥ 4 sind, also entweder $a = 3$ oder $b = 3$ ist, da sie auch nicht kleiner sein können. Ist aber das eine $= 3$, so muß offenbar das andere < 6 sein, weil $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{1}{2}$ sein muß.

Wir haben hiernach offenbar folgende Fälle:

- 1) $a = 3, b = 3: K = 6, E = 4, F = 4$: Tetraeder
- 2^a) $a = 3, b = 4: K = 12, E = 8, F = 6$: Hexaeder
- 2^b) $a = 4, b = 3: K = 12, E = 6, F = 8$: Oktaeder
- 3^a) $a = 3, b = 5: K = 30, E = 20, F = 12$: Dodekaeder
- 3^b) $a = 5, b = 3: K = 30, E = 12, F = 20$: Ikosaeder.

Bezüglich der Diagramme, durch welche wir uns diese 5 Körper veranschaulichen können, verweisen wir

für das Tetraeder auf Fig. 8, Kap. XVIII

„ „ Hexaeder „ „ 9, „ XVIII

1) Legendre l. c. (Übers. v. Crelle) p. 309 und Gergonne, Annales de math. XV, p. 161.

2) Zu dieser Diophantischen Gleichung vgl. Kap. V, S. 71.

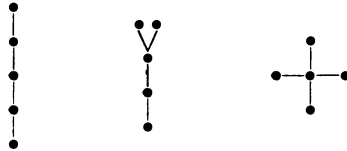
für das Dodekaeder auf Fig. 2, Kap. XVIII
 (vgl. dazu auch den Text von § 1, Kap. XVIII),
 bzw. auf Fig. 7, Kap. XIX
 für das Oktaeder „ „ 10, „ XVIII
 „ „ Ikosaeder „ „ 8, „ XIX.

§ 4. Die baumförmigen Liniensysteme in der Chemie.

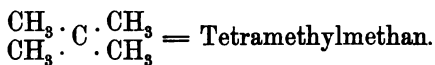
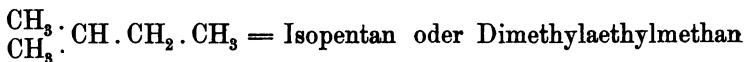
Von den baumförmigen Liniensystemen machte der berühmte englische Mathematiker Cayley¹⁾ eine interessante Anwendung auf die Theorie der chemischen Konstitutionsformeln. Um dies an einem Beispiel zu veranschaulichen, greifen wir die Paraffine heraus, deren Zusammensetzung durch die Formel C_nH_{2n+2} gegeben ist. Die n Atome C besitzen die Wertigkeit $4n$, wovon $2n + 2$ Valenzen zur Bindung der H-Atome verbraucht werden, so daß noch $2n - 2$ Valenzen zur wechselseitigen Bindung der C-Atome übrig bleiben. Stellen wir die Atome durch Punkte und die Bindung zweier mittelst einer Valenz durch eine die Punkte verbindende Linie dar, so sieht

1) „On the Mathematical Theory of Isomers.“ Philos. Mag. Bd. 47, 1874, p. 444—446 = Papers IX, p. 202; „On the analytical forms called trees, with applications to the theory of chemical combinations.“ Report of the British Association for the Advancement of Science 1875, p. 257—305 = Papers IX, p. 427—460; „On the number of the univalent radicals C_nH_{2n+1} .“ Philos. Magaz. (5) III, 1877, p. 34—35 = Papers IX, p. 544—545. Man vgl. weiter Delannoy, „Sur les arbres géométriques et leur emploi dans la théorie des combinaisons chimiques.“ Assoc. franç. XXIII, Caen 1894, t. II, p. 102—116 und „Sur le nombre d'isomères possibles dans une molécule carbonée.“ Bull. de la soc. chimique de Paris (3) XI, p. 239—248. (Die „Berichte der deutschen chem. Gesellsch.“ referieren über Cayley's Arbeiten in Jahrg. VIII, 1875, p. 1056 und über Delannoy's in Jahrg. XXVII, 1894, Bd. IV, p. 725). Es sei beiläufig bemerkt, daß Cayley auch die „Zusammensetzung“ der Substitutionsgruppen durch Diagramme (Liniensysteme) zu veranschaulichen vorschlug (Amer. Journal of Math. I, p. 174). Die erste Benutzung der „Trees“ machte Cayley jedoch (in der schon S. 305 citierten Arbeit von 1857), um den Algorithmus einer Reihe von partiellen Differentiationsprozessen geometrisch anschaulich zu gestalten.

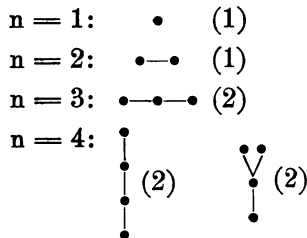
man, daß man bei $2n - 2$ Valenzen auf einen baumförmigen Typus ($n - 1$ Linien) als Diagramm¹⁾ kommen muß. Hier sind nun, je nach dem Wert von n , verschiedene Fälle möglich. Setzen wir z. B. $n = 5$, so erhalten wir offenbar folgende 3 Fälle für die Bindung der 5 C-Atome unter sich:



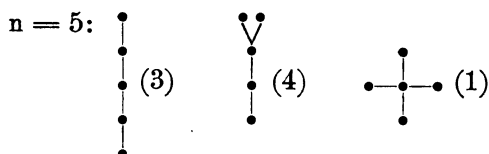
Die Konstitutionsformeln der Paraffine C_5H_{12} ergeben sich hieraus, indem man an jeden Endpunkt der obigen Diagramme je 3 und an jeden anderen Punkt je nach der Anzahl der von ihm schon ausgehenden Linien 2, 1 oder 0 H-Atome kettet. Diese 3 Paraffine existieren bekanntlich wirklich; es sind:



Eine eingehendere Behandlung wendet Cayley der einwertigen Radikalgruppe C_nH_{2n+1} zu, aus welcher sich durch Hinzufügung des Hydroxyls (HO) die Alkohole herleiten. Die Bindung der C-Atome unter sich stellt sich wieder durch ein baumförmiges Gebilde dar; hierfür ergeben sich nun folgende Fälle:



1) Cayley bezeichnet (Papers IX, p. 202) die Gebilde, die durch Fortlassung der für die einwertigen H-Atome in den vollständigen Diagrammen gesetzten Endpunkte entstehen, als „Kenogramme.“



Die rechts neben die Diagramme gesetzten eingeklammerten Zahlen geben die Anzahl der aus dem betreffenden Radikal herleitbaren Alkohole an, indem es für $n = 3$ z. B. offenbar ein Unterschied ist, ob die Gruppe HO an einen der Endpunkte oder an den mittleren Punkt gekettet wird, während wir in dem zweiten Diagramm für $n = 5$ sogar viererlei Punkte haben, welche alle noch mindestens eine Valenz übrig haben. Für $n = 1, 2, 3, 4$ giebt es die betreffenden Alkohole auch wirklich; für $n = 5$ sind von den theoretisch möglichen 8 bisher erst 7 bekannt.¹⁾

§ 5. Geschlossene Kreise.

Geht man von einem Punkte eines Liniensystems aus und kehrt, nachdem man mehrere andere Punkte des Systems, jeden jedoch nur einmal, passiert hat, wieder zu dem Ausgangspunkt zurück, so heiße der so beschriebene Weg ein „geschlossener Kreis.“ Besondere Bedeutung besitzen diejenigen geschlossenen Kreise, welche alle Punkte des Systems, jeden jedoch nur einmal, enthalten. Selbstverständlich sind geschlossene Kreise dieser letzteren Art höchstens in geschlossenen Systemen möglich. Die Frage nach ihrer Existenz läßt sich jedoch noch nicht beantworten, wenn nur die Ordnungszahlen der einzelnen Punkte gegeben sind, sondern hängt vielmehr von der inneren Struktur des Systems ab; so macht z. B., um nur eins anzuführen, das Vorhandensein einer „Brücke“ einen solchen Kreis natürlich stets unmöglich.

1) Cayley (Papers IX, p. 204) konnte 1874 noch sagen, daß es von den 8 nur 2 gäbe, daß die anderen 6 dagegen entweder nur noch unbekannt seien oder ihnen die Existenzbedingungen (Temperatur od. dgl.) fehlten.

Auf diese Frage werden wir bei Gelegenheit des Hamilton'schen Dodekaederspiels (s. Kap. XVIII) zurückkommen und werden bei Gelegenheit des Dominospiels (s. Kap. XXI) ein Abzählverfahren zur Ermittlung der Anzahl der untereinander verschiedenen geschlossenen Kreise dieser Art kennen lernen.

Sprachen wir soeben von einem alle *Punkte* eines Liniensystems gerade einmal passierenden Wege, so erhebt sich weiter eine verwandte Frage, nämlich die nach einer geschlossenen, alle *Linien* des Systems gerade je einmal umfassenden Bahn mit beliebig wiederholten Durchgängen durch die Punkte. Man erkennt bald, daß eine solche Bahn stets dann und nur dann existiert, wenn alle Kreuzungspunkte des Systems von gerader Ordnung und Endpunkte ausgeschlossen sind.

Um dies einzusehen, nehmen wir also ein System mit Punkten von ausschließlich geraden Ordnungszahlen an, gehen von einem beliebigen dieser Punkte aus und schreiten längs einer Linie fort bis zu einem zweiten Punkte, verlassen diesen wieder auf einer seiner Linien u. s. f., wobei wir uns jedesmal eine bereits passierte Linie entfernt denken. Dadurch verliert dann ein Punkt jedesmal, wenn er passiert wird, 2 seiner Linien. Da nun alle Punkte von gerader Ordnung sein sollten, so besitzen also alle Punkte immer eine gerade Anzahl bzw. 0 Linien; ausgenommen allein ist der Ausgangspunkt, welcher eine ungerade Anzahl von Linien besitzt. Wir müssen daher notwendig zu dem Ausgangspunkte schliesslich zurückkommen, da jeder andere Punkt, zu dem wir gelangen, uns auch die Möglichkeit bietet, ihn wieder zu verlassen. Wir bekommen also zunächst jedenfalls eine geschlossene Bahn und behalten dann im allgemeinen noch eine Anzahl von Linien übrig, welche noch nicht durchlaufen sind; diese bilden dann ein oder mehrere Liniensysteme, jedoch mit Punkten von ausschließlich geraden Ordnungszahlen. Da ursprünglich das ganze System zusammenhing, so muß in jedem der übrig bleibenden getrennten Teile mindestens ein Punkt vorkommen, welcher bereits auf unserer Bahn passiert wurde. Es sei *A* ein solcher Punkt. Zu ihm mögen wir auf unserer

ersten Wanderung längs der Linie a_1 gekommen sein und ihn längs a_2 wieder verlassen haben; wir gehen nun jetzt in dem übrig gebliebenen System von dem Punkt A auf einer der übrig gebliebenen Linien aus und beschreiben wieder irgend eine geschlossene, zu A zurückkehrende Bahn, was natürlich wegen der geraden Ordnung aller Punkte stets möglich sein muß. Diese zweite geschlossene Bahn denken wir uns in die erste eingefügt, indem wir die erste zunächst in unveränderter Weise durchwandern, bis wir längs der Linie a_1 den Punkt A erreichen, dann diesen aber nicht auf a_2 verlassen, sondern jetzt erst jene zweite geschlossene Bahn durchlaufen, welche uns ja zu A zurückführt, und dann A längs a_2 verlassen, um nun den Rest der ersten Bahn zu beschreiben und zum Ausgangspunkt zurückzukehren. In derselben Weise fahren wir dann fort, und so gelingt es offenbar, alle etwa noch undurchlaufenen Linien des Systems successive einzufügen.

Besitzt unser System dagegen ungerade Kreuzungspunkte, so sind es nach § 1 deren mindestens 2. Nehmen wir also deren 2 an und gehen wir von einem derselben aus, so müssen wir schließlicb offenbar zu dem anderen als dem einzigen Punkt, der noch von ungerader Ordnung ist, hinkommen. Haben wir damit noch nicht alle Linien des Systems durchlaufen, so enthält der Rest jedenfalls nur noch Punkte gerader Ordnung, da die beiden Punkte ungerader Ordnung eine ungerade Anzahl, alle anderen aber eine gerade Anzahl von Linien verloren haben. Wir können also den Rest wieder in lauter geschlossene Bahnen zerlegen und diese dann der ersten ungeschlossenen Bahn passend angliedern, so daß wir auch jetzt noch einen alle Linien des Systems gerade einmal umfassenden Linienzug erhalten, welcher zwar nicht mehr geschlossen ist, sondern in dem einen ungeraden Punkte seinen Anfang und in dem anderen sein Ende nimmt. — Haben wir allgemein $2s$ Punkte ungerader Ordnung (die Anzahl ist ja nach S. 304 stets gerade), so lassen sich offenbar alle Linien des Systems nur in s voneinander getrennten und ungeschlossenen Linienzügen durchlaufen. — Stellt man sich dagegen die Aufgabe,

alle Linien je zweimal zu durchwandern, so sind stets alle Punkte als von gerader Ordnung anzusehen und die Durchwanderung ist in *einem* geschlossenen Zuge möglich.

Wir fassen unsere Resultate folgendermaßen zusammen:

In einem geschlossenen Liniensystem mit Kreuzungspunkten von ausschließlich geraden Ordnungszahlen läßt sich stets eine geschlossene Bahn so angeben, daß jede Linie des Systems gerade einmal passiert wird; enthält ein System zwei Punkte ungerader Ordnung, so lassen sich auch jetzt noch alle Linien zu einem zusammenhängenden, wenn auch nicht mehr geschlossenen Linienzug verbinden¹⁾; bei $2s$ Punkten ungerader Ordnung lassen sich stets s getrennte Linienzüge so angeben, daß jede Linie auf ihnen gerade einmal durchlaufen wird.²⁾ — Bei zweimaliger Durchwanderung aller Linien ist stets eine geschlossene Bahn möglich.

1) Euler, *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*. *Commentarii Academiae Petropolitanae* VIII, 1741, p. 128—140.

2) Clausen, *Astron. Nachr.* XXI, 1844, No. 494, p. 216, vgl. auch C. Hierholzer, *Math. Ann.* VI, 1873, p. 30—32.

Kapitel XVII.

Brücken und Labyrinth.

§ 1. Das Euler'sche Brückenproblem.

Der Pregel bildet bei Königsberg durch Gabelung eine Insel, welche „Kneiphof“ heisst (*A* in Fig. 1). Über den Fluß führen an dieser Stelle im ganzen 7 (in der Fig. 1 mit ihre Namen bezeichnete) Brücken, davon 5 auf die Insel selbst. In

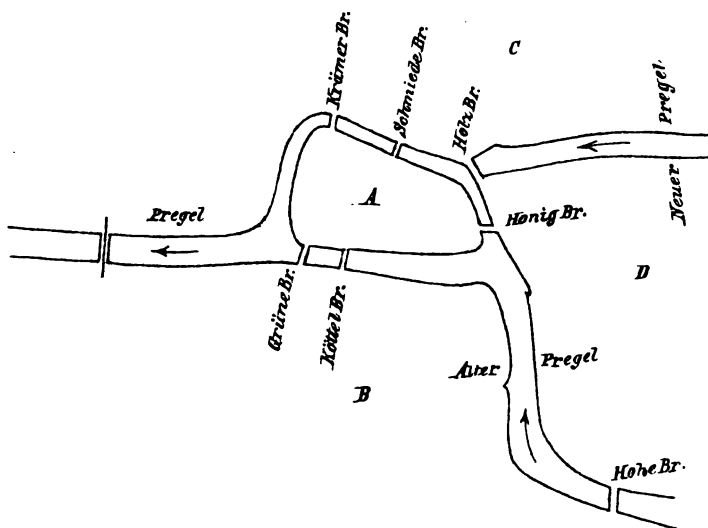


Fig. 1.

den dreißiger Jahren des vorigen Jahrhunderts wurde nun die Frage aufgeworfen, ob es möglich sei, die 7 Brücken hinter-

einander, jede aber nur einmal, zu passieren. Diese Fragestellung wurde für Euler, der davon hörte, die Veranlassung zu allgemeineren Betrachtungen, welche er der Petersburger Akademie vorlegte¹⁾ und welche wir als die ersten Anfänge einer Analysis situs betrachten dürfen.

Was zunächst die spezielle Königsberger Aufgabe anlangt, so sieht man leicht, daß dieselbe nicht lösbar ist. Ersetzen wir nämlich die Gebiete *A*, *B*, *C*, *D* durch Punkte und die Brücken durch Linien, so erhalten wir das Diagramm der Fig. 2. Da 5 Linien von *A* ausgehen und von *B*, *C* und *D* je 3, so sind alle 4 Punkte von ungerader Ordnung, und wir wissen (s. Kap. XVI, § 5), daß alsdann für die Durchlaufung der 7 Linien mindestens 2 Linienzüge erforderlich sind.

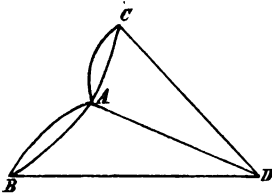


Fig. 2.

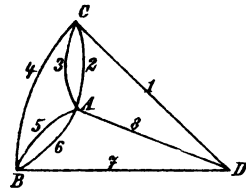


Fig. 3.

Besteht dagegen auch noch eine Verbindung zwischen *B* und *C*, wie dieselbe jetzt thatsächlich durch eine in der Fig. 1 links (ohne Namen) verzeichnete Eisenbahnbrücke hergestellt ist, so lassen sich diese 8 Brücken in einem zusammenhängenden Zuge passieren. Es sind alsdann nämlich die Punkte *B* und *C* (s. Fig. 3) mit je 4 Linien von gerader und *A* und *D* mit 5 resp. 3 Linien von ungerader Ordnung und letztere daher Anfangs- und Endpunkt des Linienzuges; ein solcher Linienzug ist z. B. der durch die Fig. 3 angegebene, wo die beigetzten Ziffern angeben, in welcher Reihenfolge die Linien zu durchlaufen sind.

Um noch einige weitere Beispiele anzuführen, so erkennt

1) *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*. Comment. Acad. Petropolit. VIII, 1741, p. 128—140.

man sofort, daß die Seiten und Diagonalen eines Quadrats sich auch nicht in einem, sondern erst in 2 Zügen durchlaufen lassen, weil wir (s. Fig. 4) hier 5 Punkte haben, von denen 4 je 3 Linien aussenden, also von ungerader Ordnung

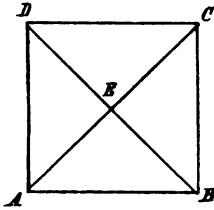


Fig. 4.

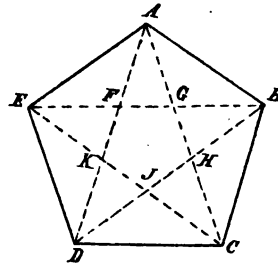


Fig. 5.

sind; dagegen läßt sich ein 5-Eck mit allen seinen Diagonalen in einem Zuge durchlaufen, weil alle Punkte von gerader Ordnung sind (s. Fig. 5); diese Bahn ist sogar eine in sich geschlossene, da hier keinerlei Punkte ungerader Ordnung vorkommen. Eine solche geschlossene Bahn ist z. B.:

A B C D E F G B H I D K F A G H C I K E A.

Könnte eine Spinne in dem nachfolgenden (Fig. 6) Stück Mauerwerk sämtliche Fugen in einem Zuge, jede gerade einmal,

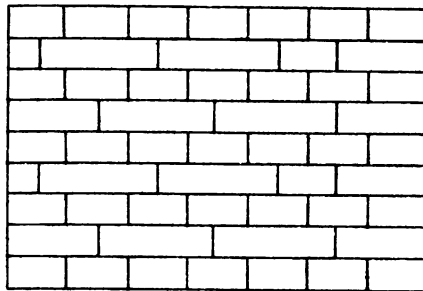


Fig. 6.

durchwandern? Die Antwort lautet offenbar „nein“, weil alle Kreuzungspunkte von ungerader Ordnung sind. Dagegen läßt

sich die geforderte Wanderung für die Listing's „Vorstudien zur Topologie“¹⁾ entnommene Fig. 7 mit nur 2 Punkten ungerader Ordnung, nämlich *A* und *O*, ausführen. Bei der praktischen Ausführung einer solchen Durchlaufung hat man nur darauf zu achten, daß, wenn man sich alle bereits durchlaufenen Linien fortgenommen denkt, die nächste Linie niemals so gewählt wird, daß durch ihre Fortnahme eine Zerfällung des Systems eintritt, vielmehr zuvor alle anderen von dem betreffenden Punkt ausgehenden Linien durchlaufen werden.

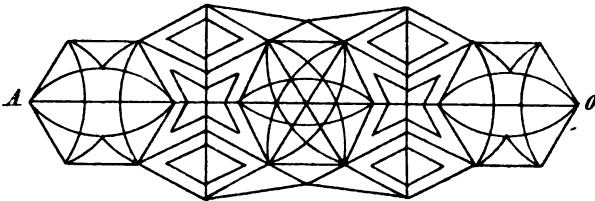


Fig. 7.

Zum Schluß werfen wir noch folgende Frage auf: „Für welche der regulären Polyeder lassen sich in einem Zuge alle Kanten, jede gerade einmal, hintereinander durchwandern? Zu dem Ende betrachten wir die in Kap. XVIII, Fig. 2, 8, 9, 10 und Kap. XIX, Fig. 8 gegebenen Diagramme und sehen ohne weiteres, daß für Tetraeder, Hexaeder, Dodekaeder und Ikosaeder alle Punkte von ungerader Ordnung sind, so daß daher für dieselben bzw. mindestens 2, 4, 10, 6 Linienzüge erforderlich sind, während für das Oktaeder, in dessen Ecken ja je 4 Kanten zusammenlaufen, die Aufgabe lösbar ist. Da nun Oktaeder und Hexaeder dualistisch verwandt sind, insofern die Ecken des einen den Flächen des anderen und vice versa entsprechen (vgl. Kap. XVI, S. 310), so folgt daraus, daß für das Hexaeder die dualistisch entsprechende Aufgabe lösbar sein muß, nämlich: Die Flächen des Körpers von einer zur anderen so zu durchwandern, daß dabei jede Kante gerade einmal überschritten wird. Für das

1) Göttinger Studien 1847, Abt. I, p. 870 (Fig. 19).

Oktaeder ist diese Aufgabe dann natürlich nicht lösbar, ebenso wenig für die anderen 3 Körper, vielmehr sind hierfür am Tetraeder, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder bezw. mindestens 2, 4, 6, 10 Linienzüge erforderlich.

§ 2. Labyrinth.

Die vielen Erzählungen von Labyrinth, welche zum Teil schon den frühesten Zeiten angehörten, — wir erinnern nur an das des Minos auf Kreta, das zu den 7 Weltwundern gerechnete ägyptische, das samische, das italische u. s. w.¹⁾ — aber auch noch jetzt, wie z. B. in Paris im Jardin des Plantes etc., vorkommen und wie sie schliesslich von jedem Strafsen- und Eisenbahnnetz gebildet werden²⁾, legen uns die Frage nahe nach einer beim Durchwandern zu beobachtenden einfachen Regel, geeignet, ein Verirren unter allen Umständen zu ver-



Fig. 8.

hindern und somit den Ariadnefaden zu ersetzen. Fig. 8 giebt uns zunächst als ein Beispiel eines solchen Labyrinths das aus dem Garten des Palastes von Hampton Court in der Nähe

1) Eine Aufzählung der als „Labyrinth“ bezeichneten Bauwerke des Altertums findet sich bei Plinius, *Historia naturalis* XXXVI, 13. Eine Abbildung des kretischen Labyrinths weisen verschiedene Münzen von Cnossus auf (s. B. V. Head, *Historia Numorum*. Oxford 1887, p. 389—391, Figg. 245—248).

2) Es sei hier auch an die verschiedenen Irrgarten-Spiele erinnert, z. B. Deutsche Reichspatente Nr. 60253 u. 93441 (Patentkl. 77).

von London¹⁾, welches unter der Regierung Wilhelms III. (1689—1702) angelegt wurde; dabei bedeuten die schwarz gezeichneten Teile Hecken aus Buchen, Eiben u. s. w., während die weissen Teile Alleen sind. Das von diesem Labyrinth eingenommene Areal misst mehr als $\frac{1}{4}$ Acre, also etwa 11 Ar. In der Mitte des Labyrinths befindet sich ein Ruheplatz mit 2 Sitzen unter den in der Figur angegebenen Bäumen. Als Schlüssel, um diesen Platz sicher zu erreichen, giebt unsere Quelle¹⁾ an, daß man die Alleen so durchwandern muß, daß man mit der rechten Hand von Anfang an beständig an der Hecke vorbeistreift. Statt der rechten Hand konnte auch ebensogut die linke gewählt werden, wie man leicht erkennt, und weiter reicht die Befolgung dieser Regel auch aus, um über den Ruheplatz hinweg direkt wieder zum Ausgang zurückzukommen. In dem letzteren Falle streift man dann an jedem Teil der Heckenanlagen im Laufe der Wanderung gerade je einmal vorbei und zwar an jeder der beiden Seiten einer Hecke aufser an der im Innern gelegenen Heckenanlage, welche mit dem übrigen Teil nicht zusammenhängt und deren Hecken gar nicht gestreift werden. Denken wir uns diesen letzteren Teil der Hecken weg, wodurch gewisse jetzt getrennte Alleen zu einer vereinigt würden, so würde bei Befolgung jener Vorschrift jede Allee gerade zweimal und zwar in verschiedenen Richtungen durchwandert.

Die hiermit schon angedeutete Regel, um unter allen Umständen zum Ausgang zurück zu gelangen, dürfte in allgemeiner Fassung zuerst von Wiener²⁾ ausgesprochen sein, dessen Vorschrift folgendermaßen lautet: *Beim Eintritt in das Labyrinth wähle man einen der beiden Ränder des Eintrittsweges aus und verfolge fortgesetzt diese Randlinie; man muß dann notwendig nach aufsen gelangen.* — Man sieht, daß alsdann in jedem Kreuzungspunkte die Fortschreitungsrichtung eindeutig bestimmt ist, ferner, daß man zu jedem Punkt immer nur

1) s. Encyclopaedia Britann. XIV, p. 181.

2) Chr. Wiener „Über eine Aufgabe aus der Geometria situs“. Mathem. Annal. Bd. VI, 1873, p. 29 u. 30.

auf einem Wege gelangen kann, wenn 2 an demselben Wege an gegenüberliegenden Rändern gelegene Punkte als wesentlich verschieden angesehen werden. Ein schon einmal passierter Punkt kann daher nie wieder erreicht werden, bevor nicht der Ausgangspunkt der Wanderung wieder erreicht ist. Man kommt also zum Eingang des Labyrinths zurück oder gelangt zu einem von dessen etwaigen sonstigen Ausgängen; will man zu dem Eintrittspunkt zurück oder zu einem bestimmten Ausgang, so braucht man die anderen Ausgänge sich ja nur verschlossen zu denken und sie unter Beobachtung der allgemeinen Regel zu passieren; dann muß man schließlich zu dem gewünschten Punkt kommen.

§ 3. Durchwanderung aller Wege eines Labyrinths.

Das Verfahren Wiener's dient nur dazu, unter allen Umständen wieder aus einem Labyrinth herauszuführen, führt dabei den Wanderer aber keineswegs mit Notwendigkeit durch alle Gänge desselben hindurch. Wie aber, wenn dies gerade die mit der Wanderung verbundene Absicht wäre, wenn z. B. in irgend einem Gange ein Gegenstand verloren wäre, den wiederzufinden das Motiv der Wanderung wäre? Für diesen Fall dient eine andere von Herrn Trémaux¹⁾ angegebene Methode, dessen Regeln folgendermaßen lauten:

1. *Von dem Ausgangspunkt gehe man längs eines beliebigen Weges weiter, bis man an einen Endpunkt oder Kreuzungspunkt kommt. Im ersteren Falle kehre man zurück, im zweiten Falle dagegen schreite man auf einem beliebigen der übrigen Wege fort, wobei jedesmal — wie auch weiterhin stets — der gewählte Weg ein Zeichen erhält. Diese Regel befolge man so lange, wie man noch zu Kreuzungspunkten kommt, die man noch nicht passiert hatte.*

2. *Kommt man zu einem schon passiertem Kreuzungspunkte und zwar auf einem Wege, welcher erst zum ersten Mal durch-*

1) s. Lucas, Récréat. math. t. I, p. 47—50.

laufen wird, so kehre man längs desselben zurück. Wurde der Weg dagegen schon zum zweiten Mal durchwandert, so schreite man auf einem anderen, noch nicht passierten Wege oder, wenn ein solcher nicht mehr vorhanden, auf einem erst einmal passierten fort.

Unsere Forderung einer zweimaligen Durchwanderung aller Wege involviert (s. Kap. XVI, S. 314), daß man zum Ausgangspunkt zurückkehren muß. Nachdem ein Kreuzungspunkt zum ersten Mal passiert worden ist, müssen von seinen Wegen zwei mit je einem Zeichen versehen sein. Kommt man ein zweites Mal zu ihm, so kehrt man entweder auf dem Wege, auf dem man gekommen, zurück, derselbe erhält dann 2 Zeichen und scheidet ganz aus, und es bleiben noch die beiden vorher einmal gezeichneten Wege — oder aber man war auf einem dieser beiden zum zweiten Mal gekommen, womit derselbe ausscheiden würde, und schlägt nun einen noch unpassierten oder, wenn ein solcher nicht vorhanden, den anderen schon einmal passierten Weg ein, so daß nachher wieder 2 einmal gezeichnete Wege oder kein solcher vorhanden ist. Dasselbe gilt für weitere Durchgänge; jeder Kreuzungspunkt besitzt daher nach einem Durchgang stets 2 oder 0 einmal gezeichnete Wege, nur der Ausgangspunkt besitzt deren bis zum Schluß gerade einen. Es sei nun Z der Punkt, von dem aus man zum letzten Mal zum Ausgangspunkt A gelangt, ohne dann diesen nochmals wieder verlassen zu können; dann müssen also zum Schluß alle von A ausgehenden Wege zweimal passiert sein, darunter auch AZ . Zu Z ist man nun zuvor entweder von A oder von einem dritten Punkt Y aus gekommen. — In dem ersteren Falle hatte man also die Wanderung mit einer zweimaligen Durchlaufung von ZA geschlossen und war vorher auch in A gewesen; wir denken uns dann einfach den zuletzt zweimal passierten Weg ZA gestrichen und berücksichtigen nur den Rest der Wanderung, die dann gleichfalls in A endet, so zwar, daß dort dann alle Linien auch zweimal passiert sind. Wir kommen somit stets auf den zweiten Fall, daß man nämlich zu Z von einem dritten Punkt Y aus kommt. In diesem

Fälle müssen alle Wege von Z zweimal durchlaufen sein, da man sonst durch die Wanderung von Y über Z nach A unsere Regeln verletzt hätte. Denn da der Weg ZA vorher schon einmal passiert war, so war also auch der Kreuzungspunkt Z schon passiert; man kam jetzt zuletzt von Y an und mußte, wenn dieser Weg nicht vorher schon einmal passiert war, wieder zu Y zurückkehren; war aber in Z ein noch gar nicht passierter Weg, so hätte dieser nach der zweiten Regel gewählt werden müssen. Wenn also ZA gewählt wurde, so war dies nur möglich, wenn alle Wege von Z bereits vor diesem letzten Durchgang durch Z zweimal passiert waren und nur noch ZY und ZA erst je einmal; denn mehr als 2 einmal passierte Wege kann Z nach Obigem nicht haben. Nach diesem Durchgang sind dann alle Wege von Z zweimal passiert.

Man sieht, daß uns dies Rasonnement durch den Schluss von n auf $n + 1$ zu dem Resultate führen wird, daß alle Linien je zweimal passiert sind. Nehmen wir nämlich an, daß die Wanderung in der angegebenen Weise vom Ende aus so weit rückwärts verfolgt ist, daß die Punkte $A, A' \dots A^{(k)}$ berührt sind und daß von den Linien dieser Punkte bereits durchweg nachgewiesen ist, daß sie je zweimal passiert sind, so gilt dies also auch von denjenigen Linien, welche das System der $A, A' \dots A^{(k)}$ mit den übrigen Punkten verbinden, Linien, welche jedenfalls existieren, da ja das ganze System zusammenhängend sein soll. Es sei daher Z der Punkt, von dem aus man zuletzt in das System der $A, A' \dots A^{(k)}$ eingetreten ist, um dieses dann bis zum Schluss nicht wieder zu verlassen, und zwar mag man von Z zu $A^{(i)}$ gekommen sein. Zu Z wieder ist man dann entweder von $A^{(i)}$ gekommen oder aber von einem dritten Punkt Y , welcher entweder einer der anderen A außer $A^{(i)}$ ist oder überhaupt nicht zu dem System der Punkte A gehört. Im ersteren Falle würde man also $\dots A^{(i)}ZA^{(i)} \dots$ gewandert sein, und dies war nur zulässig, wenn Z entweder ein Endpunkt oder aber schon vorher passiert war; auf jeden Fall dürfen wir uns dann die Linie $ZA^{(i)}$ ganz fort denken, ohne daß dadurch ein anderer Punkt als höchstens der etwaige

Endpunkt Z in seinem Zusammenhang mit dem übrigen System beeinträchtigt wird. Diese zweimalige Durchwanderung von $ZA^{(i)}$ hintereinander ist ja nämlich, wenn Z kein Endpunkt ist, nur dann zulässig, wenn man bereits vorher zu Z gekommen war und zwar auf einem anderen Wege; es ist daher ausgeschlossen, daß $ZA^{(i)}$ eine „Brücke“ (s. S. 304) ist, durch deren Fortnahme das System zerfallen würde. Wir kommen dann jedenfalls wieder auf den zweiten Fall, daß nämlich die Wanderung ging $\dots YZA^{(i)} \dots$, und dann folgt offenbar ganz ebenso wie oben (S. 324/325), daß auch alle Wege von Z je zweimal passiert sind, womit aber der versprochene Beweis erbracht ist.

Zum Schluß sei noch eine andere, von Herrn G. Tarry¹⁾ angegebene Vorschrift, von welcher die obige eine weitere Spezialisierung ist, erwähnt, nämlich folgende:

Der Weg, auf welchem man zu einem Kreuzungspunkt zuerst gekommen ist, wird bei späterem Durchgang durch den betreffenden Kreuzungspunkt erst dann wieder eingeschlagen, wenn alle von diesem Kreuzungspunkt sonst noch ausgehenden Wege bereits zweimal passiert sind.

1) G. Tarry, Le problème des labyrinthes. Nouv. ann. de mathém. 3ième série XIV, 1895, p. 187—190.

Kapitel XVIII.

Das Hamilton'sche Dodekaederspiel.

*Les matières de géométrie sont si sérieuses, qu'il est
avantageux qu'il s'offre quelque occasion pour les rendre
un peu divertissantes.* PASCAL.

§ 1. Geschichte und Wesen des Spiels.

Der berühmte englische Mathematiker Hamilton gab, veranlaßt durch eine Bemerkung Kirkman's¹⁾, zwei Spiele heraus unter dem Titel: *The Travellers Dodecahedron or a voyage round the world, invented by Sir William Rowan Hamilton, Royal Astronomer of Ireland, forming a new and highly amusing game for the drawing room, particularly interesting to students in mathematics of illustrating the principles of the Icosian Calculus. Published by John Jaques and son, Hatton Garden; London 1859.*²⁾

Wir werden später sehen, daß beide Spiele auf dasselbe hinauslaufen, und wollen uns daher zunächst auf das eine derselben, das Dodekaederspiel, beschränken. Unter „Dodekaeder“ versteht man bekanntlich einen Körper, der von 12 Flächen begrenzt ist, so zwar, daß jede Fläche ein 5-Eck ist, die Zahl aller Kanten

1) „On the Polyhedra“. Philosoph. Transactions 1858, p. 160.

2) Vgl. auch Hamilton, „Memorandum respecting a new System of Roots of Unity.“ Philos. Mag. (4) XII, 1856, Juli—Dec., p. 446 und von dems., „On the Icosian Calculus.“ British Association Report 1857, Notices and abstracts p. 3. Der Erfinder des Quaternionen-calculs mußte an diesem Spiel besonderes Interesse nehmen, da er durch dasselbe zu einer Art von Calcul geführt wurde, der, wenn auch von dem der Quaternionen verschieden, doch einige Analogieen hierzu bot („having some general analogy thereto“, Philos. Mag. 1856). — Ein auch als Dodekaederspiel bezeichnetes Orakelspiel (vgl. z. B. Jean de Meun, *Le plaisant jeu du Dodechedron, revu par Gruyet, Lyon 1580*) hat mit dem Hamilton'schen nichts gemein.

daher = 30 und die aller Ecken, in deren jeder 3 Kanten zusammenstoßen, = 20 ist (s. Kap. XVI, S. 310). Eine anschauliche Vorstellung von diesem Körper erhält man am besten, wenn

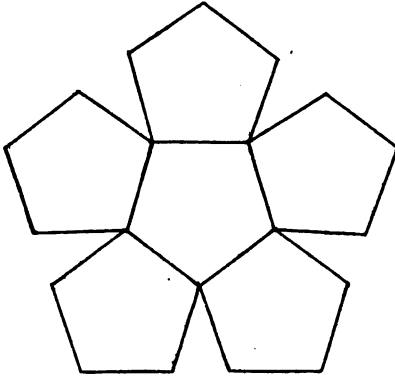


Fig. 1.

man sich in Fig. 1 um das mittlere 5-Eck die anderen 5 so herumgeklappt denkt, daß je zwei benachbarte sich aneinander anschließen. Hierdurch entsteht ein nach einer Seite hin offener Kasten, gebildet von sechs 5-Ecken mit einem Rand, der sich aus 10 Kanten zusammensetzt. Setzt man auf diesen Kasten einen zweiten kongruenten so, daß die

10 Randkanten des einen mit denen des anderen zusammenfallen, so schließen beide zusammen allseitig einen Raum ab und bilden einen Körper, den man „Dodekaeder“ nennt.

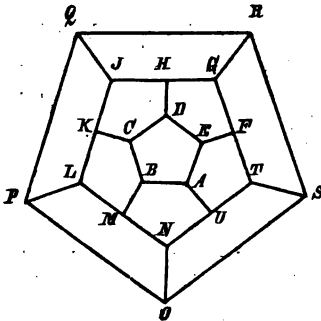


Fig. 2.

Diagramm des Dodekaeders.

Hamilton's Aufgabe verlangte nun, auf einer Wanderung längs der Kanten des Dodekaeders alle 20 Ecken und zwar jede nur einmal zu passieren, wobei die 5 ersten Stationen vorgeschrieben sein sollten. Da es nun offenbar nicht darauf ankommt, daß die Wanderung auf einem räumlichen Gebilde ausgeführt wird, so können wir an die Stelle unseres Dodekaeders ein ebenes Diagramm (s. Fig. 2) setzen und dies der weiteren Betrachtung zu grunde legen.¹⁾

1) Hamilton hatte in dem von ihm herausgegebenen Spiel auch ein ebenes Diagramm gewählt; die Ecken waren durch Löcher vertreten,

§ 2. Wanderungen ohne Vorschriften über Reihenfolge der Stationen.

Stellen wir uns zunächst die einfachere Aufgabe, die 20 Stationen in beliebiger Reihenfolge zu durchwandern, ohne uns um die Vorschrift bezüglich der 5 ersten Stationen zu kümmern, so erhalten wir in folgender Weise leicht eine Lösung: Wegen der überall gleichmäßigen Struktur des Körpers ist offenbar keine Ecke vor einer anderen bevorzugt, ebenso sind auch natürlich alle Kanten und Flächen unter sich gleichberechtigt, und dasselbe gilt dann natürlich auch für die entsprechenden Teile des von uns substituierten Diagramms. Wir gehen daher von einem ganz beliebigen Punkt längs einer Linie bis zu einem Endpunkt derselben. Für die weitere Fortsetzung stehen uns dann 2 Wege offen, einer rechts und einer links. Bezeichnen wir das Einschlagen des rechten Weges durch ein *r* und das des linken durch ein *l*, so führt nach Hamilton die Befolgung der Vorschrift

rrrllllrlrlrlrrrrllllrlrl

in den verschiedenen Punkten uns wieder zum Ausgangspunkt zurück. Hierbei sind natürlich 20 Linien durchlaufen, während die übrigen 10 unbenutzt geblieben sind. Um dies noch deutlicher zu machen, geben wir in dem nebenstehenden Beispiel der Fig. 3 in ausgezogenen Linien die durchlaufene Bahn an, während die nicht durchlaufenen Linien punktiert sind. Der Anfangspunkt ist durch * bezeichnet.¹⁾

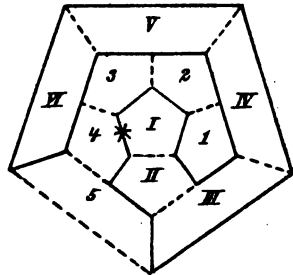


Fig. 3.

in die elfenbeinerne Pföcke gesteckt wurden, sobald man die betreffende Ecke passiert hatte (s. hierüber die Angaben in Brit. Assoc. Rep. 1857).

1) Bezeichnet man die Operation der Umkehrung einer Linie in ihrer Richtung, also den Übergang von *AB* zu *BA* mit *i*, so ist offenbar $l = rir$; denn anstatt z. B. von *AB* direkt zu *BM* vermöge *l* überzugehen (s. Fig. 2), können wir auch erst vermöge *r* von *AB* zu

Von den 3 von jedem Punkte ausgehenden Linien werden immer 2 durchlaufen, während die dritte ausscheidet. Die Aufgabe unseres Spiels läßt sich also auch dahin fassen: Von den 30 Linien 10 auszuwählen, von denen keine 2 in einem Punkte zusammenstossen und durch deren Ausscheidung der Zusammenhang des Liniensystems nicht aufgehoben wird.

Der französische Artillerieoffizier Herr Hermary hat eine andere Regel zum Auffinden der Lösungen angegeben¹⁾, welche jedoch nur auf einer anderen Bezeichnung beruht. Wählen wir die beiden ersten Punkte beliebig und schreiten dann links oder rechts fort, so kommen wir zunächst zu einem dritten Punkt. Diese 3 Punkte liegen stets in einem 5-Eck, und wir werden nun von dem dritten Punkt ab entweder auf dem

BC , von hier vermöge i zu CB und dann vermöge r zu BM übergehen. Offenbar führt eine fünfmalige Anwendung der Operation r hintereinander zu der ursprünglichen Linie zurück, ebenso bringt eine zweimalige Anwendung von i keinerlei Änderung hervor; es ist also $r^5 = i^2 = 1$. Unter Berücksichtigung dieser Gleichungen wird das obige Hamilton'sche Schema identisch $= 1$, wenn man für l überall $r^i r$ setzt, was natürlich die Bedeutung hat, daß eine Wanderung nach dieser Hamilton'schen Vorschrift stets zu ihrem Ausgangspunkt zurückführen muß, gleichgültig, wo dieser liegt. Die Operation ri führt offenbar nach dreimaliger Anwendung wegen der 3 in jedem Punkte zusammenstossenden Linien zum Ausgangselement zurück, so daß $(ri)^3 = 1$ ist. Für das räumliche Dodekaeder bedeutet r eine Drehung um die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Flächen (um 72°), i eine solche um die Verbindungslinie der Mitten zweier gegenüberliegenden Kanten (um 180°) und ri eine solche um eine Körperdiagonale (um 120°); sie und ihre Iterationen und Kombinationen liefern also offenbar alle Drehungen, welche das Dodekaeder in sich überführen. Diese 3 Gleichungen: $r^5 = 1$, $i^2 = 1$, $(ri)^3 = 1$ charakterisieren die Morphologie des Dodekaeders und des ihm dualistisch entsprechenden Ikosaeders vollkommen (Hamilton, Phil. Magaz. 1856, p. 446); andererseits sind dies auch die definierenden Relationen der Substitutionengruppe von der Ordnung 60, von der die algebraische Auflösung der allgemeinen Gleichung 5^{ten} Grades abhängt (s. Dyck, Gruppentheor. Studien, Math. Ann. XX, 1882, p. 35) und die daher auch den Namen „Ikosaedergruppe“ führt.

1) Publiciert von Lucas, Récréat. t. II, p. 216.

Umfang dieses 5-Ecks fortschreiten oder auf ein anderes 5-Eck übergehen. Ersteres, was wir fortan als ein „Bleiben“ und daher durch b bezeichnen wollen, wird offenbar dann und nur dann eintreten, wenn unser Schema mit rr oder ll beginnt, während dagegen der „Wechsel“ des 5-Ecks, durch w bezeichnet, für die Anfänge rl und lr eintritt u. s. w. Übertragen wir so unser Hamilton'sches Schema in diese neue Bezeichnungsweise, so erhalten wir offenbar statt dessen:

$b b w b b w w w w w b b w b b w w w w w$.

Denken wir uns längs einer solchen alle Punkte umfassenden geschlossenen Bahn einen Schnitt geführt, so wird natürlich die Oberfläche des Dodekaeders zerteilt und zwar in 2 Teile, aber auch nicht in mehr, da die Bahn sich ja vor dem Ende nicht schloß. Jeder dieser beiden Teile besteht aus einer gewissen Anzahl von 5-Ecken, da andere Begrenzungsflächen ja nicht vorkommen. Diese beiden Teile sind nun so beschaffen, daß jedes 5-Eck darin höchstens an 2 andere grenzt. Würde ein Fünfeck nämlich an 3 oder mehr andere grenzen, so müßte sich mindestens an *zwei* aufeinanderfolgende von seinen Seiten je ein neues 5-Eck anlegen.

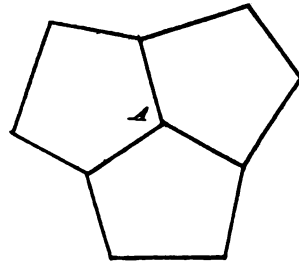


Fig. 4.

Dies ist aber nicht möglich, denn wir hätten alsdann — in Form eines ebenen Diagramms gezeichnet — eine Konfiguration wie in Fig. 4, und der Punkt A wäre auf unserer Wanderung gar nicht passiert. Wir erhalten also stets Figuren von der Form der Fig. 5, und zwar besteht offenbar jeder der beiden Teile aus 6 Fünfecken, weil sonst die Umgrenzung des Gebietes sich nicht aus 20 Seiten zusammen-

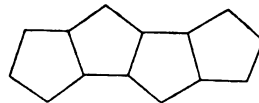


Fig. 5.

setzen würde, wie es ja für unsere Bahnkurve der Fall sein muß. So liefern nämlich die mittleren 4 Fünfecke, von deren

Seiten je zwei zur Anheftung dienen, je drei ihrer Seiten für die Bahncurve und die beiden äußeren Fünfecke deren je vier, zusammen also 20. Wir haben in Fig. 3 die 5-Ecke der beiden Teile durch römische bzw. arabische Ziffern markiert, wobei als das Fünfeck 6 natürlich die Begrenzung des ganzen Diagramms anzusehen ist.

§ 3. Wanderungen bei vorgeschriebenen Anfangsstationen.

Wir erhielten nach dem Hamilton'schen Schema des vorigen §, das übrigens in 2 einander gleiche Hälften zerfällt, eine geschlossene, alle 20 Punkte umfassende Bahn. Da wir nun diese Bahn auch ebensogut in umgekehrter Richtung, sowie auch von irgend einem anderen ihrer 20 Punkte aus durchlaufen können, so sieht man, daß unsere obige Vorschrift

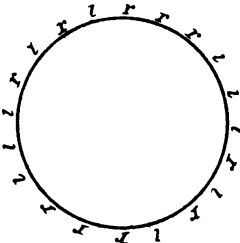


Fig. 6.

ein Cyklus sein muß, den wir daher auch in der Form der Fig. 6 schreiben wollen, und daß wir eine richtige Lösung bei beliebigem Ausgangspunkt stets erhalten, wenn wir unserem Cyklus an beliebiger Stelle einen Einschnitt geben und dann den von ihm angegebenen Weg beschreiben.

Legen wir nun jetzt die Hamilton'sche Form des Problems zu grunde, nehmen wir also an, daß die ersten 5 Stationen der Wanderung vorgeschrieben sind, so liegt darin offenbar weiter nichts, als eine Bestimmung darüber, an welcher Stelle der obige Cyklus (s. Fig. 6) begonnen werden soll. Sind diese 5 Stationen z. B. A, B, C, K, L (s. Fig. 2), so würde dies bedeuten, daß wir zunächst von A nach B , dann r nach C , darauf l nach K und sodann l nach L gehen, also den Cyklus mit rl beginnen sollen. Die Bedingung der vorgeschriebenen 5 ersten Stationen involviert also stets die Bedingung eines der folgenden Anfänge:

- 1) rrr 2) $r r l$ 3) $r l r$ 4) $l r r$
 5) $r l l$ 6) $l r l$ 7) $l l r$ 8) $l l l$,

welche alle in unserem Cyklus leicht zu erhalten sind. Erstreben wir nämlich den Anfang $r r r$, so können wir an den in der Fig. 7 mit 1^a und 1^b bezeichneten Stellen beginnen, so zwar, daß wir den Cyklus von 1^a ab im Uhrzeigersinne, von 1^b ab im umgekehrten Uhrzeigersinne durchlaufen. Ein Einschnitt an jener anderen Stelle des Cyklus, welche gleichfalls die Kombination $r r r$ aufweist, würde offenbar keine weitere Lösung mehr liefern. Wir erhalten in diesem Falle also 2 Lösungen, und man sieht ohne weiteres, daß für den Anfang 8) dasselbe gelten muß. Für den Anfang 2) bekommen wir die Einschnitte 2^a und 2^b und auch nur diese 2 Lösungen; ein gleiches gilt für 7), das aus 2) durch eine Vertauschung von r mit l hervorgeht, eine Vertauschung, die offenbar allgemein einer Umkehrung der Durchlaufungsrichtung des Cyklus gleichkommt. Die gleiche Anzahl von Lösungen erhalten wir auch für den Fall 4), nämlich 4^a und 4^b , ebenso auch für den dazu reziproken Fall 5). Für den Anfang 3) ergeben jedoch die Einschnitte 3^a , 3^b , 3^c , 3^d , — die beiden ersteren mit einem Umlauf im Uhrzeigersinne, die beiden letzteren mit einem im umgekehrten Sinne — 4 von einander verschiedene Lösungen, welche folgende Anfänge haben:

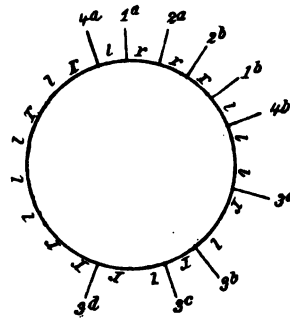


Fig. 7.

- $3^a) r l r l r r \dots$
 $3^b) r l r r r \dots$
 $3^c) r l r l l \dots$
 $3^d) r l r l r l \dots$

Das Entsprechende gilt natürlich für den reziproken Fall 6). Die Aufgabe ist also bei vorgeschriebenen 5 ersten Stationen

jedenfalls stets lösbar und zwar entweder auf 2 oder auf 4 Arten.

Diese Methode gestattet aber auch, für diejenigen Fälle, in denen eine andere Anzahl von Anfangsstationen vorgeschrieben ist, die Zahl der Lösungen zu bestimmen. Nehmen wir zunächst einmal an, dass nur die beiden ersten Stationen bestimmt sind; dann brauchen wir, nachdem wir die erste Linie durchlaufen haben, die Fortsetzung nur nach unserem Cyklus zu machen, dürfen denselben jedoch an beliebiger Stelle beginnen, was offenbar wegen der 2 unter sich gleichen Hälften 10 und zwar untereinander verschiedene Möglichkeiten giebt. Da nun für jeden Einschnitt der Cyklus auch noch in zwei verschiedenen Richtungen durchlaufen werden kann, so erhält man im ganzen 20 Lösungen, welche alle, wie man sich leicht überzeugt, von einander verschieden sind. Von diesen 20 verschiedenen Lösungen beginnen ebenso viele mit l wie mit r , so daß wir also, wenn die 3 ersten Stationen, d. h. also der erste Buchstabe des Cyklus vorgeschrieben ist, noch 10 Lösungen haben. Ist dagegen nur der Ausgangspunkt vorgeschrieben, so können wir denselben zunächst in 3 verschiedenen Richtungen längs der 3 von ihm ausgehenden Linien verlassen und von dem nächsten Punkt ab haben wir dann für die weitere Bahn noch je 20 verschiedene Möglichkeiten; von diesen 60 Bahnen fallen jedoch offenbar immer je 2 zusammen; nennen wir nämlich die 3 von dem Ausgangspunkt ausgehenden Linien a , b , c , so fällt eine Bahn, welche mit a beginnt und mit b endigt mit einer anderen mit b beginnenden und mit a endigenden zusammen u. s. w. Es giebt also für unser Spiel im ganzen 30 verschiedene geschlossene Bahnen; denn in dem vorgeschriebenen Anfangspunkt ist eine Beschränkung natürlich nicht enthalten, wenn die Bahn geschlossen ist. Sind die 4 ersten Stationen vorgeschrieben, d. h. also die beiden ersten Zeichen des Cyklus festgesetzt, so sind 2 Fälle zu unterscheiden: entweder soll der Cyklus mit rr resp. dem dazu reziproken ll beginnen; dann haben wir, wie leicht zu sehen, 4 verschiedene Lösungen, oder aber der

Cyklus beginnt mit rl resp. lr , dann giebt es 6 Lösungen. Der Fall der 5 vorgeschriebenen Anfangsstationen ist oben erledigt. Schreibt man 6 oder mehr Anfangsstationen vor, so existiert eine Lösung nicht mehr unter allen Umständen. Sind die 6 ersten Stationen, d. h. also die 4 ersten Zeichen des Cyklus vorgeschrieben, so sind folgende Fälle zu unterscheiden:

- 1) $rrrr\dots$
- 2) $rrrl\dots$
- 3) $rrlr\dots$
- 4) $rlrr\dots$
- 5) $lrrr\dots$
- 6) $rrll\dots$
- 7) $rlrl\dots$
- 8) $rllr\dots$

und ebensoviel dazu reziproke. Da die Kombinationen 1) und 8) in unserem Cyklus (Fig. 6) nicht vorkommen, so besitzen diese Fälle keine Lösungen, wie übrigens auch leicht aus dem Diagramm sich ergibt. Die Fälle 3), 4), 6) besitzen je eine Lösung, 2) und 5) je 2 Lösungen und 7) schliesslich deren 3, nämlich

- a) $rlrlrr\dots$
- b) $rlrlll\dots$
- c) $rlrlrl\dots$

Ist schliesslich noch der 7-te Punkt vorgeschrieben, so giebt es 3 Lösungen überhaupt niemals mehr, sondern höchstens noch 2, da von den 3 Lösungen unseres obigen Falles 7) nur noch 2, nämlich a) und c), in dem 5-ten Zeichen übereinstimmen. Schreibt man schliesslich die 8-te Station auch noch vor, so giebt es höchstens noch eine Lösung, wie man bei näherer Betrachtung der Fälle 2), 5), 7) leicht erkennt. Wir schliessen diese Betrachtung mit einer tabellarischen Zusammenstellung der erhaltenen Resultate:

Zahl der vorgeschriebenen Stationen:	Zahl der Lösungen:
1.	30.
2.	20.
3.	10.
4.	6 oder 4.
5.	4 oder 2.
6.	3, 2, 1 oder 0.
7.	2, 1 oder 0.
8 oder mehr.	1 oder 0.

§ 4. Weitere Aufgaben Hamilton's.

Hamilton stellte noch eine Reihe weiterer Aufgaben über das Dodekaederspiel. Eine zweite Aufgabe verlangte: Bei vorgeschriebenen 3 ersten und beliebig vorgeschriebener letzter Station alle Ecken je einmal zu passieren, wobei es im allgemeinen natürlich nicht möglich ist, zum Ausgangspunkt zurückzukehren. Wir geben im folgenden nach Lucas¹⁾ einige Beispiele für diese Aufgabe, welche 0, 1, 2 oder 4 Lösungen besitzt:

1) *A, B, C* seien die 3 ersten, *Q* die letzte Station (s. Fig. 2).

Die einzige Lösung ist

A B C D E F T U N M L K J H G R S O P Q.

2) Dieselben Anfangsstationen, die Endstation sei *S*. Es giebt 2 Lösungen, nämlich:

A B C D E F T U N M L K J H G R Q P O S
A B C K J Q R G H D E F T U N M L P O S.

3) Dieselben Anfangsstationen, *O* Endstation.

4 Lösungen, nämlich:

A B C D E F G H J K L M N U T S R Q P O
A B C K J H D E F G R Q P L M N U T S O
A B C K J Q P L M N U T F E D H G R S O
A B C K L M N U T S R G F E D H J Q P O.

1) Récréat. t. II, p. 220.

4) Dieselben Anfangsstationen, K Endstation. Die Aufgabe ist unlösbar, desgleichen, wenn die Endstation eine der Ecken D, F, M, N, P, T ist.

Eine weitere Fragestellung Hamilton's verlangt, daß man bei gewissen vorgeschriebenen Anfangsstationen nach einer weiteren vorgeschriebenen Anzahl von Stationen soweit gekommen ist, daß man zu keinem neuen Punkte mehr hinkommen kann. Wir beschränken uns auf ein Beispiel, nämlich daß man bei dem Anfang $A B C D E$ nach 6 weiteren Stationen festsitzen soll. Die Lösung ist leicht:

$A B C D E F G R Q J H.$

Ein viertes Hamilton'sches Problem geht dahin, alle Stationen mit Ausnahme einer bestimmten zu passieren und zwar, indem etwa die beiden ersten, sowie die beiden letzten vorgeschrieben sind. Sind z. B. A, B als die beiden ersten und N, O als die vorletzte bezw. letzte Station vorgeschrieben und soll M gemieden werden, so erhält man folgende Lösung:

$A B C K L P Q J H D E F G R S T U N O.$

§ 5. Das Ikosaederspiel. Die übrigen regulären Polyeder.

Die Aufgabe des Ikosaederspiels besteht darin, das Ikosaeder so zu durchwandern, daß jede Fläche gerade einmal passiert wird, wobei man von einer Fläche zur anderen nur über die Schnittkante beider gehen darf. Da das Ikosaeder das dualistisch entsprechende Gebilde zum Dodekaeder ist, so zwar, daß die 20 Ecken des letzteren den 20 Flächen des ersteren und die 12 Flächen des letzteren den 12 Ecken des ersteren entsprechen, während die 30 Kanten beider Körper sich gegenseitig zugeordnet sind (vgl. Kap. XVI, S. 310), so kommt diese Aufgabe offenbar genau auf dasselbe hinaus wie die oben behandelte. Wir brauchen daher auf dieses zweite Hamilton'sche Spiel nicht näher einzugehen. Dagegen wenden wir uns noch kurz zu den übrigen regulären Polyedern und unterwerfen auch sie der Förderung des Dodekaederspiels.

Zunächst das Tetraeder: Um eine geschlossene, alle 4 Punkte umfassende Bahn zu erhalten, sind 2 Linien passend zu entfernen. Hierfür ergeben sich 3 Möglichkeiten, nämlich die 3 Paare der in Fig. 8 in gleicher Weise mit 1, 2 oder 3 Strichen gezeichneten Linien, so daß wir also 3 Lösungen hier haben. Das Lösungsschema in der obigen Bezeichnungsweise lautet hier $r l r l$.

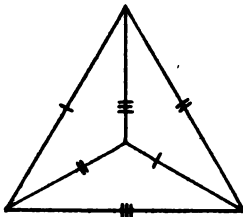


Fig. 8.
Diagramm des Tetraeders.

Beim Würfel, bei dem 4 Linien zu entfernen sind, ergeben sich hierfür 6 passende Kombinationen. Nehmen wir an, daß unter den 4 Linien sich 1 (s. Fig. 9) befindet. Dann dürfen die Linien 2, 9, 4, 12 nicht entfernt werden; es kommen also hierfür nur noch in Betracht 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11. Wird zunächst auch 3 fortgenommen, so sieht man leicht, daß nur folgende 2 Fälle möglich sind:

1, 3, 5, 7

1, 3, 6, 8,

ohne daß 2 der 4 Linien in einem Punkt zusammenstoßen. Von diesen beiden Kombinationen würde die erste den Zusammenhang des Liniensystems aufheben und scheidet daher als unbrauch-

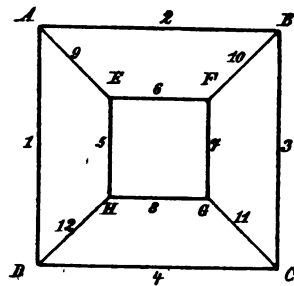


Fig. 9. Diagramm des Hexaeders
(Würfels).

bar aus. Befindet sich aber die Linie 3 nicht unter den fortgenommenen, so müssen die Linien 10 und 11 entfernt werden, weil B und C andere Linien nicht verlieren können, und es bleibt nur die Kombination 1, 5, 10, 11. Wir haben also 2 passende Kombinationen mit Linie 1, im ganzen also $\frac{2 \cdot 12}{4} = 6$ und ebenso viele Lösungen unseres Problems. Das Lösungsschema lautet hier $r l l l r l l$. Bei einem vorgeschriebenen Anfangspunkt giebt es also 6 Lösungen; bei vor-

geschriebenen 2 ersten Stationen liefert das Schema noch 4 Fortsetzungen, nämlich beginnend mit rr , ll , rl , lr . Sind die 3 ersten Punkte vorgeschrieben, so giebt es noch 2 Lösungen und bei 4 nur noch eine. Sind die 5 ersten Punkte vorgeschrieben, so hört die unbedingte Lösbarkeit überhaupt auf; so ist z. B. der Anfang $A E F G C$ unmöglich. Wir bekommen also folgende Tabelle:

Zahl der vorgeschriebenen Anfangspunkte: Zahl der Lösungen:

1	6
2	4
3	2
4	1
5 oder mehr.	1 oder 0.

Das Oktaeder (s. Fig. 10) ist das dualistische Analogon zum Würfel (vgl. S. 320); stellen wir also hier die Aufgabe des zweiten Hamilton'schen Spiels, so erledigt sich diese ohne weiteres durch die über den Würfel soeben gemachten Ausführungen. Wir wollen hier jedoch einmal auch die Forderung des ersten Hamilton'schen Spiels erheben. Da in jeder Oktaederecke 4 Kanten zusammenstoßen, so sind offenbar jetzt in jedem Punkt des Diagramms 2 Linien zu entfernen. Hierfür ergeben sich nun 8 verschiedene passende Kombinationen, worauf wir hier nicht näher eingehen. Es ist demnach auf 8 verschiedene Arten möglich, die Ecken des Oktaeders oder, was dasselbe ist, die Flächen des Würfels im Zusammenhang, jedoch ohne Wiederholungen zu durchwandern.

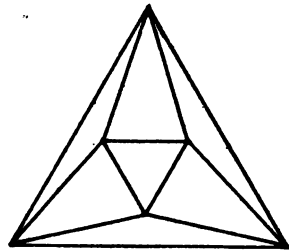


Fig. 10. Diagramm des Oktaeders.

Kapitel XIX.

Das Farben-Karten-Problem.

I have not succeeded in obtaining a general proof.
CAYLEY. Collect. Papers XI, p. 8.

§ 1. Wesen und Geschichte des Problems.

Wenn es sich um die Herstellung einer geographischen Karte von irgend welchem zusammenhängenden, aus verschiedenen Ländern bestehenden Gebiet handelt und die verschiedenen Länder verschiedenfarbig angegeben werden sollen, so daß jedenfalls stets zwei nicht bloß in einem Punkt zusammenstoßende, sondern längs einer Linie aneinander grenzende Länder in verschiedenen Farben gehalten sind, so entsteht die Frage, ob sich eine Anzahl von Farben so angeben läßt, daß mit ihnen diese Darstellung unter allen Umständen ausführbar ist, und welches die Mindestzahl hierfür ist. Man kommt bei näherer Betrachtung bald zu der Überzeugung, daß 4 Farben stets hinreichend, im allgemeinen aber auch notwendig sind, eine Thatsache, welche englischen Verfertigern von Karten schon seit langem geläufig sein soll.¹⁾ Der berühmte Mathematiker Cayley lenkte nun auf diese interessante Frage die Aufmerksamkeit der Londoner mathematischen, sowie der königlichen geographischen Gesellschaft²⁾,

1) Als erste Pfadfinder auf diesem Gebiet werden in der einschlägigen Litteratur gewöhnlich Francis Guthrie und De Morgan genannt; vgl. hierüber Frederick Guthrie (Bruder von Francis G.), Note on the Colourings of Maps. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh X, 1878—80, p. 727—728.

2) „On the colouring of maps“. London Mathem. Society 1878 und

wobei er mit den oben als Motto vorausgesetzten Worten seinen Misserfolg bei seinen Bemühungen, einen allgemeinen Beweis zu finden, bekannte. Auch ein von Kempe¹⁾ gegebener Beweis ist nicht ausreichend, wie Herr Heawood²⁾ gezeigt hat, so daß z. Z. eine endgültige Erledigung unserer Frage, so sicher auch die Thatsache an sich zu sein scheint³⁾, noch aussteht.

§ 2. Nachbargebiete auf einfach zusammenhängenden Flächen.

Eine mit unserem Problem eng zusammenhängende Frage ist die folgende: Wieviel Länder sind höchstens möglich, so daß jedes jedes andere längs einer Linie berührt? Offenbar wären solche Gebiete, welche wir nach dem Vorgang von Herrn Heffter als „Nachbargebiete“ bezeichnen wollen, alle in verschiedenen Farben darzustellen. Die Zahl der Nachbargebiete ist also jedenfalls eine untere Grenze für die in der Fragestellung des § 1 gesuchte Zahl, ohne daß jedoch — worauf zuerst Herr Heffter⁴⁾ hingewiesen hat — beide Zahlen identisch sein müssen.⁵⁾

Proceedings of the Royal Geograph. Soc. I, 1879, p. 259—261 = Collected Papers XI, p. 7—8.

1) „On the Geographical Problem of the Four Colours“ Amer. Journ. of Mathem. t. II, 1879, p. 193—200; vgl. a. W. E. Story, „Notes on the preceding paper“ *ibid.* p. 201—204. Kurze Résumés seiner Arbeit gab Kempe in London Mathem. Transactions, X, 1879, p. 229—231 und in Nature XXI, 1880, p. 399—400.

2) Heawood, „Map-colour theorem“. Quarterly Journ. of Math. XXIV, 1890, p. 332—338 und „On the four-colour map theorem“. *ibid.* XXIX, 1898, p. 270—285.

3) Allerdings ist noch kürzlich von Herrn Petersen auch die tatsächliche Richtigkeit des Satzes angezweifelt worden (*Intermédiaire des mathématiciens* t. VI, 1899, p. 38); vgl. hierzu Anm. 1, S. 350.

4) Heffter, „Über das Problem der Nachbargebiete.“ *Mathem. Annal.* Bd. 38, 1891, p. 477.

5) Dies war angenommen bei Baltzer, *Leipziger Ber. Math.-phys. Kl.* Bd. 37, 1885, p. 6 und bei Dingeldey, „*Topologische Studien über die aus ringförmig geschlossenen Bändern durch gewisse Schnitte erzeugbaren Gebilde.*“ Leipzig 1890, p. 8.

Schon Kempe¹⁾ und später Heffter²⁾ haben darauf aufmerksam gemacht, daß die Frage nach den „Nachbargebieten“ ein dualistisches Analogon besitzt in der nach den „Nachbarpunkten“, d. h. der Maximalanzahl der Punkte, deren jeder mit jedem anderen durch eine Linie so verbunden ist, daß keine Linie eine andere schneidet. Beide Fragestellungen, die nach den Nachbargebieten und die nach den Nachbarpunkten, sind völlig koinzident. Haben wir nämlich n Nachbargebiete, so nehmen wir in jedem derselben einen Punkt an, ziehen von einem dieser Punkte an die Grenzen der $n - 1$ angrenzenden Gebiete je eine Linie und setzen diese Linien über die Grenzen hinaus fort bis zu den in den betreffenden angrenzenden Gebieten angenommenen Punkten. Der erste Punkt ist dann mit allen $n - 1$ anderen Punkten durch je eine Linie verbunden und durch Fortsetzung dieses Verfahrens erhält man offenbar n Nachbarpunkte. Man sieht leicht, daß, wenn man umgekehrt von n Nachbarpunkten ausgeht, man zunächst die Punkte durch kleine Flächen ersetzen und diese dann soweit ausdehnen kann, daß sie sich alle längs gewisser Linien berühren, und man so n Nachbargebiete erhalten kann. Diese Betrachtungen sind offenbar ganz unabhängig davon, auf was für einer Fläche die Nachbargebiete bezw. Nachbarpunkte verzeichnet sind.

Die Anzahl der Nachbargebiete in einer „einfach zusammenhängenden“, d. h. nur von einer in sich zurücklaufenden Randlinie begrenzten Fläche war bereits von Weiske, einem Freunde des berühmten Mathematikers Moebius, auf 4 angegeben.³⁾ Die Fig. 1 zeigt uns 4 solche Nachbargebiete 1, 2, 3, 4, während die Punkte I, II, III, IV 4 Nachbarpunkte sind. Wenn also Moebius in einer Vorlesung vom Jahre 1840, wie

1) l. c. p. 200.

2) l. c. p. 477 u. 485.

3) s. Baltzer, „Eine Erinnerung an Moebius und seinen Freund Weiske.“ Leipz. Ber. 1885, p. 2. In diesem, in Moebius' Nachlaß vorgefundenen und jedenfalls vor 1840 zu datierenden Konzept Weiske's findet sich auch zuerst der Begriff der Nachbargebiete, die dort „spatia confinia“ heißen.

Baltzer erzählt¹⁾, die Aufgabe stellte: „Ein indischer König wollte sein Reich unter seine 5 Söhne so teilen, daß das Gebiet jedes Sohnes mit den 4 anderen Teilen eine Grenzlinie, nicht bloß einen Punkt, gemein habe; wie war die Teilung auszuführen?“ — so wollte Moebius von seinen Schülern die Antwort haben, daß die Aufgabe unlösbar sei. Man sieht jedenfalls aus der Zahl der Nachbargebiete, daß im allgemeinen für Herstellung einer Karte im Sinne unseres Problems 4 Farben

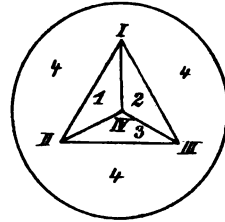


Fig. 1.

notwendig sind, was natürlich nicht ausschließt, daß man in besonderen Fällen schon mit weniger auskommt, wie z. B. nach einer Bemerkung Tait's²⁾ für Gebieteinteilungen, bei denen in jeder Ecke immer nur 3 Gebiete zusammenstoßen, auf alle Fälle schon 3 Farben genügen. Andererseits überzeugt man sich, wie gesagt, leicht, daß 4 Farben auch stets ausreichend sind. Zur Illustration geben wir in Fig. 2 ein Beispiel mit Angabe der 4 Farben *a*, *b*, *c*, *d*; 2 nur in einem Punkt zusammenstoßende Gebiete sind hier, wie ja gestattet, in derselben Farbe (*a* resp. *b*) gehalten, dagegen niemals 2 mit gemeinsamer Grenzlinie.

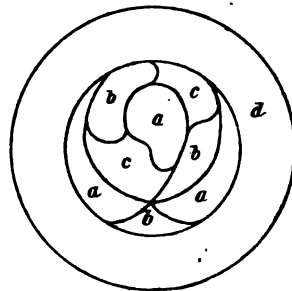


Fig. 2.

§ 3. Nachbargebiete auf der Ringfläche.

Gehen wir nun von einer einfach zusammenhängenden Fläche über zu einer Fläche von höherem Zusammenhang, einer Fläche vom Geschlecht 1, wie man im Gegensatz zu der

1) Baltzer, l. c. p. 1.

2) Tait, „On the Colouring of Maps“. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh X, 1880, p. 502.

vorherigen als einer Fläche vom Geschlecht 0 zu sagen pflegt, so wird die Anzahl der Nachbargebiete größer. Wir können uns als Repräsentanten dieser Flächen eine Ringfläche denken, also etwa die Fläche, welche durch Rotation eines Kreises um eine außerhalb desselben gelegene Achse entsteht; es genügt nämlich, da die Zahl der Nachbargebiete nur vom Geschlecht der Fläche abhängt, *einen* Repräsentanten für jede

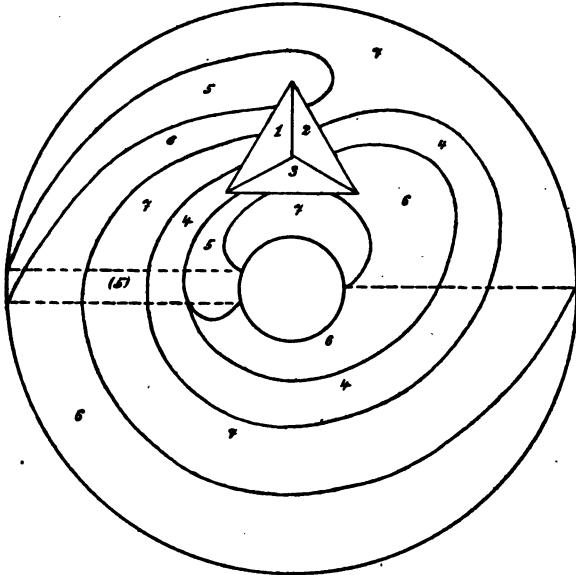


Fig. 3.

Geschlechtszahl herauszugreifen, wie es ja bei der einfach zusammenhängenden Fläche offenbar auch ganz gleichgültig war, ob wir dieselbe eben, kugelförmig oder sonstwie gekrümmt voraussetzten. Für die Ringfläche ist die Anzahl der Nachbargebiete, wie Herr Heawood¹⁾ zuerst bemerkt hat, sieben. Fig. 3 veranschaulicht uns diese 7 Nachbargebiete der Ringfläche. Da-

1) In der oben citierten Arbeit von 1890, p. 334. Kempe hatte (l. c. p. 196) nur 6 angenommen; auch bei Lucas, *Récréat. mathém.* t. IV, p. 170 ist diese Zahl irrtümlicherweise angegeben.

bei müssen wir uns den inneren Kreis ausgeschnitten und an die gezeichnete Kreisringfläche unten noch ein gleiches Papierblatt angeheftet denken, so zwar, daß beide überall längs des äußeren und des inneren Grenzkreises zusammenhängen. Das auf der Fläche gezeichnete Liniensystem giebt dann eine Einteilung der Fläche in 7 Nachbargebiete 1, 2...7, wobei die punktierten Linien und ebenso der mit eingeklammelter Zahl (5) bezeichnete Gebietsteil als auf dem unteren Papierblatt liegend

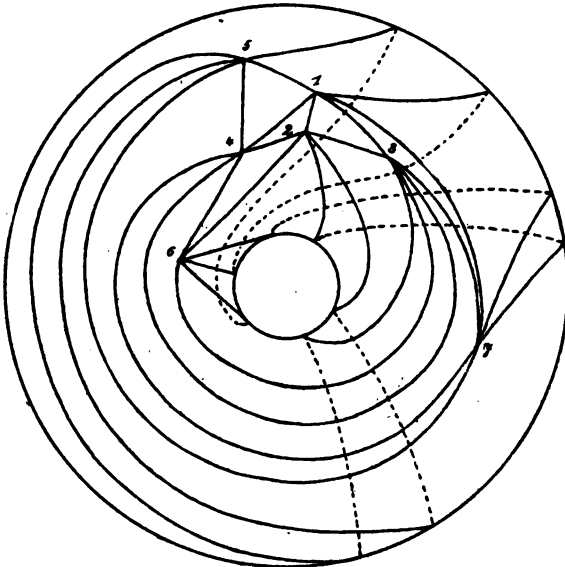


Fig. 4.

zu denken sind. Abgesehen von diesem Gebiet (5) gehört von dem unteren Blatt die südliche Hälfte zum Gebiet 6 und die nördliche zum Gebiet 7. In derselben Darstellungsweise giebt Fig. 4 sieben Nachbarpunkte 1, 2...7 auf einer Ringfläche.

Für die Anzahl der Nachbargebiete auf Flächen vom Geschlecht ≥ 1 hat Herr Heawood a. a. O. eine obere Grenze bestimmt und auch gezeigt, daß eine gleiche Anzahl von Farben für das Farbenproblem jedenfalls hinreichend ist; im Anschluß hieran hat dann Herr Heffter in der oben citierten

Arbeit für eine große Zahl von Fällen, welche insbesondere die Flächen vom Geschlecht 1—6 einschließen, den Beweis erbracht, daß jene Heawood'schen Maximalzahlen auch wirklich erreicht werden, mithin so viele Farben auch wirklich nötig werden können. Eine kartographische Darstellung der Saturnringfläche im Sinne unseres Problems würde also unter der Voraussetzung einer politischen Einteilung des Areal's eventuell 7 verschiedene Farben erheischen, andererseits würden diese aber auch stets ausreichen.

Damit ist dann das Farbenproblem für eine ganze Anzahl von Flächen höheren Geschlechts als erledigt anzusehen, während für den scheinbar einfachsten Fall, den der einfach zusammenhängenden Fläche, ein Beweis noch aussteht.

§ 4. Eine Verallgemeinerung des Kartenproblems.

Erheblich schwieriger gestaltet sich unser Problem, wenn verschiedene, ganz voneinander getrennte Gebietsteile zu derselben politischen Gemeinschaft gehören und infolgedessen gleichfarbig dargestellt werden sollen. Die erforderliche Anzahl von Farben wird alsdann natürlich von der Anzahl der

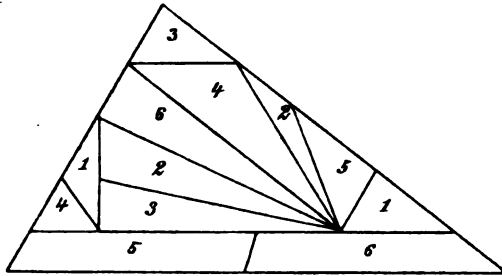


Fig. 5.

verschiedenen Teile abhängen. So giebt z. B. Fig. 5 eine Gebietseinteilung in 6 Staaten 1, 2... 6 an, deren jeder aus 2 Landesteilen besteht, wo offenbar für jeden Staat eine besondere Farbe erforderlich ist, weil jeder mit jedem anderen längs einer Linie zusammengrenzt.

§ 5. Ein Satz von Tait.

The theorem has this provoking interest, that it mocks alike at doubt and proof.

KIRKMAN. Reprints from the Educat. Times, 1861, p. 118.

Probably the proof of this curious proposition has hitherto escaped detection from its sheer simplicity. Habitual stargazers are apt to miss the beauties of the more humble terrestrial objects.

TAIT. Philos. Mag. 1884, I p. 42.

Im Zusammenhang mit unserem Problem steht ein von Tait¹⁾ aufgestellter Satz, welcher folgendermaßen lautet: „Die Linien eines Liniensystems, dessen sämtliche Punkte von der Ordnung 1 sind und das keine Brücke besitzt, lassen sich in 3 Klassen teilen, so daß von jedem Punkt eine Linie aus jeder der 3 Klassen ausgeht.“²⁾ In dem Beispiel der Fig. 6

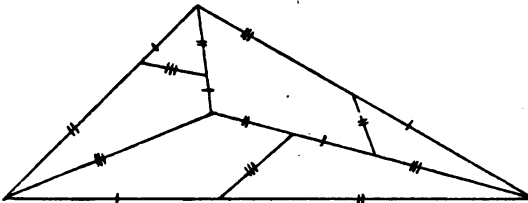


Fig. 6.

haben wir die 3 Klassen bzw. durch 1, 2 und 3 Striche gekennzeichnet; von jedem Punkt geht dort eine „eingestrichene“, eine „zweigestrichene“ und eine „dreigestrichene“ Linie aus.

Der Zusammenhang dieses Satzes mit dem Farbenproblem ist leicht zu erkennen: Sieht man die Fläche des Liniensystems als eine geographische Karte an und stellt sie in 4 Farben a, b, c, d dar³⁾, so ergibt sich aus dieser Darstellung in 4 Farben eine Einteilung der Linien in 3 Klassen in Tait'schem

1) „Listing's Topologie“ Philosoph, Magazine. 5-te Serie, Bd. 17, 1884, I, p. 40.

2) Wir geben den Satz in der von uns in Kap. XVI eingeführten Terminologie; man vgl. wegen derselben insbesondere S. 303 u. 304.

3) Thatsächlich läßt sich ja dieser Fall, wie bereits oben (S. 343) bemerkt, schon mit 3 Farben erledigen.

Sinne. Bezeichnet man nämlich eine Grenzlinie mit 1 Strich, wenn in ihr 2 Gebiete in den Farben a und b oder 2 in den Farben c und d zusammenstoßen, dagegen mit 2 Strichen, wenn die betreffenden Farben a, c oder b, d und mit 3 Strichen, wenn sie a, d oder b, c sind, so erhält man notwendig in jedem Punkte eine Linie von jeder der 3 Klassen. Denn in jedem Punkt stoßen 3 Länder von verschiedenen Farben, sagen wir: a, b, c , zusammen, und das giebt nach den obigen Festsetzungen 3 verschieden gestrichene Grenzlinien.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß hiernach natürlich bei den Polyedern, welche nur dreifache Ecken besitzen, — also unter den regulären beim Tetraeder, Würfel und Dodekaeder — die Kanten sich so in 3 Klassen teilen lassen, daß in jeder Ecke 3 Kanten verschiedener Klassen zusammenstoßen. Für das Dodekaeder veranschaulicht Fig. 7 dies, während für

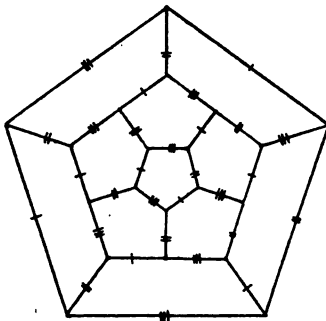


Fig. 7. Diagramm des Dodekaeder.

die beiden übrigen Körper die Verhältnisse so einfach liegen, daß eine nähere Erläuterung überflüssig erscheint (für das Tetraeder in Kap. XVIII, Fig. 8 angegeben). Beim Ikosaeder lassen sich übrigens, wie auch gleich bemerkt sein mag, die Kanten in 5 Klassen teilen derart, daß die 5 Kanten jeder Ecke verschiedenen Klassen angehören (vgl. Fig. 8, in der die Linien auch wieder je nach ihrer

Klasse durch 1 bis 5 Striche gekennzeichnet sind und außerdem jede Kante und die ihr gerade gegenüberliegende durch einen gleichen Buchstaben bezeichnet sind). Beim Oktaeder mit seinem vierkantigen Ecken ist eine entsprechende Klasseneinteilung so leicht auszuführen, daß weitere Angaben überflüssig sind.

Es mag weiter bemerkt werden, daß, wenn wir in Fig. 7 abwechselnd eine eingestrichene und zweigestrichene Linie durchlaufen, wir eine Lösung des Hamilton'schen Dodekaeder-

problems (s. Kap. XVIII) erhalten; ebenso, wenn wir zwischen ein- und dreigestrichenen oder zwischen zwei- und dreigestrichenen Linien abwechseln. Für das Tetraeder hatten wir

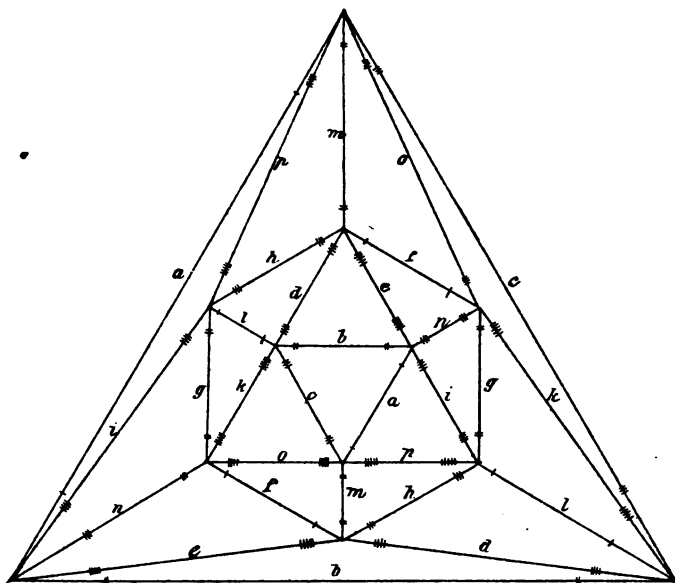


Fig. 8. Diagramm des Ikosaeders.

bereits in Kap. XVIII, § 5 nach dieser Methode Hamilton'sche Rundreisen konstruiert. Allgemein ergibt sich eine solche aus einer Tait'schen Dreiklasseneinteilung der Linien durch Fortnahme der Linien einer Klasse, wofern nicht hierdurch das Liniensystem in mehrere Teile zerfällt. — Umgekehrt liefert eine auf andere Weise hergeleitete Hamilton'sche Rundreise eine Tait'sche Dreiklasseneinteilung. Denn bei einer solchen Rundreise bleibt von den 3 Linien jedes Punktes je eine unbenutzt. Denken wir uns diese also fortgenommen, so reduziert sich das ganze Liniensystem auf eine geschlossene Kurve, gebildet von Linien des Systems. Versetzen wir diese Linien abwechselnd mit 1 und 2 Strichen und die vorher fortgenommenen alle mit 3, so haben wir eine Tait'sche Klasseneinteilung.

Wie das 4-Farben-Theorem, so harrt auch dieser Tait'sche Satz noch eines Beweises, ja er bedarf sogar noch weiterer Restriktionen; denn auf beliebige Liniensysteme im Raume angewandt, ist er zweifellos nicht richtig. Ein Beispiel, für welches der Satz nicht mehr gilt, ist kürzlich von Herrn Petersen angegeben worden¹⁾: Man denke sich ein 5-Eck $abcde$ und ein zweites $acebd$ im Raume und nun immer je 2 gleichbenannte Ecken durch eine Gerade verbunden, so entsteht ein räumliches Liniensystem von 10 Punkten, die alle von der ersten Ordnung sind. Bezeichnet man die 3 Linien eines beliebigen Punktes durch ein, zwei und drei Striche, so sind für die weitere Fortsetzung der Strichelung nur noch einige wenige Fälle möglich, jedoch wird man in jedem derselben bald auf die Unmöglichkeit einer Tait'schen Klasseneinteilung geführt. Zweifellos richtig ist der Tait'sche Satz nach Obigem dagegen stets, wenn das Liniensystem eine Hamilton'sche Rundreise gestattet.²⁾

1) J. Petersen, *Intermédiaire des mathématiciens*, t. V, 1898, p. 225—227, s. a. v. *dem.* *ibid.* t. VI, 1899, p. 36—38.

2) Hierauf hat zuerst Herr C. de Polignac ausdrücklich aufmerksam gemacht („Sur le théorème de Tait“. *Bull. soc. mathém. de France* t. XXVII, 1899, p. 142—145).

Kapitel XX.

Das Boss-Puzzle oder Fünfzehner-Spiel.

Hunc ludum avidissime arripiunt Magistratus, et saepe maximam diei partem ludendo consumunt: nam inter ludendi peritos horam integram ludus unus tenet. Qui huius ludi peritus est, tametsi alia nulla re insignis fuerit, ab omnibus coisitur et evocatur.

NIC. TRIGAULT über den „ludus sinicus“. De christiana expeditione apud Sinas suscepta ab societate Jesu. Rom 1615. Liber I, caput VIII, p. 90.

§ 1. Geschichte, Litteratur und Beschreibung des Spiels.

Dieses auch in Deutschland bekannte Spiel ist nach Angabe des berühmten Mathematikers Sylvester¹⁾ die Erfindung eines taubstummen Amerikaners. Bald nach seiner Erfindung (1878) verbreitete es sich über die ganze civilisierte Welt, in den Ländern englischer Zunge „Fifteenth Puzzle“, in Deutschland „Boss Puzzle“ oder auch „Fünfzehner-Spiel“ und in Frankreich „jeu du taquin“ (Neckspiel) genannt, und wurde in der ersten Zeit überall mit solchem Eifer gespielt, wie wohl kaum ein anderes Geduldspiel je zuvor. So weifs Herr Schubert z. B. von Hamburg dieserhalb zu erzählen²⁾, dafs man „die kleinen Kästchen mit den 15 Holzklötzchen selbst in den Pferdebahnen erblicken und unruhige Hände darin schieben sehen konnte“, dafs in den Comptoirs Anschläge notwendig wurden mit dem strengen Verbot des Spiels während der Bureauzeit, dafs grofse Turniere veranstaltet wurden u. s. w.

Es konnte nicht fehlen, dafs auch die Theorie sich bald des Gegenstandes annahm, und in dieser Hinsicht sind vor

1) s. Lucas, Récréat. I, 2. éd., p. 139.

2) „Zwölf Geduldspiele“ p. 76. — Vgl. a. Tissandier, La Nature VIII, 1880, 2^{ième} semestre, p. 81.

allem die Arbeiten der Amerikaner Johnson und Story¹⁾ zu nennen, welche eine erschöpfende Theorie dieses Spiels gaben.

In einem quadratischen Kästchen (s. Fig. 1) haben 16 numerierte Steine gerade Platz; ein Stein, gewöhnlich 16, wird beiseite gelegt, die anderen dagegen in beliebiger Ordnung in den Kasten gethan. Die verschiedenen Horizontal-

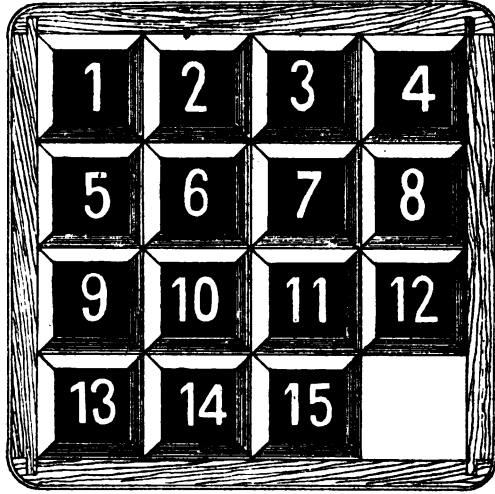


Fig. 1.

reihen oder Zeilen seien im folgenden von oben nach unten als „erste“, „zweite“ etc. unterschieden, ebenso die verschiedenen Vertikalreihen oder Kolonnen und zwar von links nach rechts gerechnet.

Die Aufgabe des Spiels besteht darin, *aus einer beliebigen anfänglichen Ordnung der Steine durch Verschiebungen*, wie sie

1) Johnson, Notes on the „15“ puzzle. Amer. Journ. of Math. II, 1879, p. 397—399. Story, Notes on the „15“ puzzle. Ibidem, p. 399—404. Unabhängig von beiden und fast gleichzeitig entwickelte Tait eine Theorie unseres Spiels, bei deren Publikation er sich jedoch mit Rücksicht auf die inzwischen erschienenen obigen Arbeiten auf eine kurze Mitteilung beschränkte (s. Tait, Note on the Theory of the „15 Puzzle“, Edinburgh Proceedings X, 1880, p. 664); s. a. C. F. Malmsten, Generalisering af det s. k. „Femtonspelet.“ Göteborgs Handl. 1882, p. 75—105.

durch das leere Feld eben ermöglicht werden, die in Fig. 1 angegebene „normale“ Ordnung herzustellen. Die Zahl der Anfangsstellungen ist sehr groß, nämlich:

$$16! = 20\,922\,789\,888\,000$$

oder, wenn man das leere Feld immer rechts unten annimmt,

$$15! = 1\,307\,674\,368\,000.$$

Von diesen Stellungen ist allerdings, wie wir später sehen werden, nur die Hälfte in die verlangte Schlussstellung überführbar.

§ 2. Das elementare Puzzle. Lösbarkeit und Unlösbarkeit.

Um das Verständnis zu erleichtern, schicken wir zunächst folgendes voraus: Wir denken uns ein rechteckiges Spiel von nur 6 Steinen, das „elementare Puzzle“ (Fig. 2), und lösen für dieses zunächst die gestellte Aufgabe. Dabei wollen wir die vier Felder links (1, 2, 4, 5) kurz das „linke“ Quadrat nennen und die vier rechts (2, 3, 5 und das leere) das „rechte“. Bei beliebiger Anfangsstellung läßt es sich stets durch Verschieben erreichen, daß Stein 4 auf Platz 1 kommt und Platz 4 nicht leer bleibt. Befindet sich dann auf Platz 4 einer der Steine 2, 3, 5, so läßt sich offenbar durch Verschieben innerhalb des rechten Quadrats 1 auf Platz 2 bringen, so daß wir also 4 auf Feld 1 und 1 auf Feld 2 haben und dann durch weiteres Verschieben aller Steine im umgekehrten Uhrzeigersinne 1 und 4 auf ihre bezüglichen richtigen Plätze bringen können. Ist aber, nachdem man Stein 4 auf Platz 1 gebracht hat, Platz 4 von 1 besetzt, so verschieben wir zunächst die Steine so, daß 4 auf Platz 4 kommt, 1 auf Platz 5 und auf Platz 1 irgend ein anderer Stein. Dann wird 1 durch Verschieben innerhalb des rechten Quadrats auf Platz 3 oder 6 gebracht und nun durch Verschieben innerhalb des linken Quadrats 4 wieder auf Platz 1, ohne daß 1 hierdurch verschoben wird, und dann durch Verschieben des rechten Quadrats 1 wieder auf 2 und darauf wie oben 4 und 1

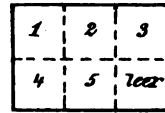


Fig. 2.

auf ihre normalen Plätze. Durch Verschieben innerhalb des rechten Quadrats läßt sich dann 2 auf seinen normalen Platz bringen und das leere Feld nach 6. Die Aufgabe ist dann gelöst, wenn zugleich 3 und 5 auf ihren Plätzen sind. Anderenfalls, d. h. wenn 3 und 5 ihre Plätze vertauscht haben, war die Aufgabe überhaupt nicht lösbar. Im letzteren Falle erreichen wir:

1	2	5
4	3	

Fig. 3.

als Endstellung, aus der sich auf dem Wege über:

2	5	3
1	4	

Fig. 4.

als Schlufsstellung auch erreichen läßt:

1	2	3
5	4	

Fig. 5.

die wir weiterhin kurz „Schlufsstellung II“ nennen wollen.

Hiernach gestaltet sich die Lösung für den Fall der 16 Felder nun folgendermaßen (s. Fig. 1): Zunächst bringt man leicht den Stein 1 an seinen normalen Platz, sodann auch, ohne 1 wieder zu verschieben, den Stein 2 an seinen Platz, und dann, ohne 1 und 2 zu rühren, die Steine 3 und 4 und das leere Feld irgendwie in die beiden letzten Kolonnen. Dann lassen sich innerhalb dieser beiden letzten Kolonnen nach dem oben für sechs Felder angegebenen, hier also für acht a fortiori gültigen Verfahren 3 und 4 auf ihre normalen Plätze bringen. Damit ist die erste Zeile hergestellt und wird nun

nicht mehr geändert. Entsprechend läßt sich offenbar auch die zweite Zeile — als oberste des 12-feldrigen Puzzles der 3 letzten Zeilen — herstellen, so daß nur noch die beiden letzten Zeilen übrig bleiben. In diesen bringt man zunächst nach dem oben dargelegten Verfahren die Steine 9 und 13 an ihre Plätze; dann handelt es sich nur noch um die 6 den beiden letzten Zeilen und 3 letzten Kolonnen angehörigen Felder. Hier stellt man gleichfalls nach dem oben dargelegten Verfahren die normale Ordnung her oder kann, wenn die Aufgabe eben überhaupt nicht lösbar ist, nur zu einer Schlufsstellung gelangen, bei der alle Steine am richtigen Platze stehen und nur 14 und 15 vertauscht sind (vgl. Fig. 5), eine Stellung, welche wir auch hier als „Schlufsstellung II“ im Gegensatz zu der ersten oder der „normalen“ bezeichnen wollen. Es sei hier gleich vorweg bemerkt, worauf wir im nächsten § zurückkommen werden, daß in diesem zweiten Fall sich auch diejenige Stellung erreichen läßt, welche aus der normalen durch Umkehrung der Reihenfolge in allen einzelnen Zeilen hervorgeht, welche also das Spiegelbild jener ist.

§ 3. Mathematische Theorie des Spiels.

Denken wir uns einen Augenblick das leere Feld mit dem Stein 16 besetzt, so können wir sagen, daß ein einzelner „Zug“, nämlich das Schieben eines Steins auf den leeren Nachbarplatz, immer in einer Vertauschung des Steins 16 mit einem benachbarten besteht. Stand nun, wie wir dies zunächst annehmen wollen, unser Stein 16 zu Anfang auch auf Feld 16, so muß, damit dies zu Ende wieder der Fall ist, die Anzahl solcher Vertauschungen offenbar eine gerade sein; denn jeder Zug in horizontaler oder vertikaler Richtung muß durch einen anderen in paralleler, aber entgegengesetzter Richtung wieder gleichsam annulliert werden, soll 16 wieder an den alten Platz zurückkehren. Überhaupt ist *die Anzahl der Züge, welche eine Stellung in eine andere mit demselben leeren Felde überführen, stets gerade.*

Wir denken uns nun für jede beliebige Stellung die Zahlen der Steine alle nebeneinander geschrieben und zwar in der Reihenfolge nach den Nummern ihrer Plätze (s. Fig. 1), wobei wir das leere Feld ignorieren, und zählen die Anzahl der Inversionen, d. h. derjenigen Fälle, in denen eine grössere Zahl einer kleineren vorangeht. Die Zahl dieser Inversionen ändert sich durch jede Vertauschung von 2 Elementen, d. h. auch durch jeden Zug, um eine ungerade Anzahl.¹⁾ Für unseren speciellen Fall ergibt sich dies leicht folgendermassen: Da offenbar ein Zug in horizontaler Richtung an der Zahl der Inversionen nichts ändert, so interessieren uns nur solche in vertikaler Richtung, also Züge, welche darin bestehen, dass ein Stein — im Sinne der Ordnung nach den Platznummern — vor bzw. hinter 3 andere gerückt wird. Die Nummer des gerückten Steins verhält sich nun zu den Nummern jener 3 so, dass sie 1) entweder grösser bzw. kleiner als jede der 3 ist oder aber 2) grösser als 2 derselben und kleiner als die dritte bzw. kleiner als 2 derselben und grösser als die dritte ist. In dem ersteren Falle ändert sich die Zahl der Inversionen durch den betreffenden Zug um 3, indem entweder 3 neue Inversionen entstehen oder 3 alte aufgehoben werden; im zweiten Falle dagegen um eine, indem entweder zwei neue entstehen und eine alte aufgehoben wird oder eine neue entsteht und zwei alte aufgehoben werden. Auf jeden Fall bringt also ein Zug hier stets eine Änderung der Inversionenanzahl um eine ungerade Zahl mit sich. Da nun die Anzahl der Züge, welche von unserer Anfangs- zur Endstellung führen, eine gerade ist, so können sich also Anfangs- und Endstellung nur um eine gerade Anzahl von Inversionen unterscheiden. Die normale Endstellung hat nun keine, d. h. eine gerade Anzahl Inversionen; die notwendige Bedingung für die Überführung einer beliebigen Anfangsstellung (mit dem leeren Feld auf Platz 16) in jene ist also die,

1) Über diesen von Bézout herrührenden und von Laplace bewiesenen Satz, den wir oben nur für einen Specialfall beweisen, fortan aber in allgemeiner Form voraussetzen müssen, s. z. B. Baltzer, Determinanten, 5. Aufl., Leipzig 1881, p. 1.

dafs die Anfangsstellung auch eine gerade Anzahl von Inversionen besitzt. Diese Bedingung ist aber auch hinreichend denn wir sahen oben, dafs jede Anfangsstellung sich entweder in die normale oder in die Schlufsstellung II überführen läfst; letzteres ist nun bei gerader Anzahl von Inversionen der Anfangslage unmöglich, da die Schlufsstellung II eine (15—14), d. h. eine ungerade Anzahl Inversionen aufweist. Offenbar giebt es hiernach ebensoviel lösbare wie unlösbare Puzzle-Aufgaben.¹⁾ Da alle Züge umkehrbar sind, so sind offenbar stets zwei Stellungen derselben Art, d. h. zwei in dieselbe Endstellung überführbare, auch ineinander überführbar. — Wir resumieren:

Kriterium I: Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Überführbarkeit einer vorgelegten Stellung mit dem leeren Felde auf Platz 16 in die normale Schlufsstellung ist die, dafs die betreffende Stellung eine gerade Anzahl von Inversionen aufweist.

Wir betrachten 2 Beispiele und bestimmen die Anzahl der Inversionen:

1	4	7	9
3	5	8	14
15	13	11	10
2	12	6	

Fig. 6a.

5	6	7	8
1	2	3	4
9	10	13	14
15	12	11	

Fig. 6b.

Wir zählen die auf jede Zahl noch folgenden kleineren Zahlen und erhalten für Fig. 6a so $0 + 2 + 4 + 5 + 1 +$

1) Wären 2 Steine mit gleicher Nummer versehen, also etwa statt 15 nochmals 14, so wäre, wie aus den Entwicklungen von § 2 folgt, in jedem Falle ausnahmslos die normale, d. h. von Inversionen freie Ordnung zu erreichen. Hierauf beruht die unbedingte Lösbarkeit eines verwandten, von Herrn Fleury erfundenen und „Caméléon“ benannten französischen Spiels. Über dieses und andere dem Puzzle verwandte Spiele Fleury's s. Lucas, Récréat. t. III, p. 89—99; 155—158; t. IV, p. 240—254, sowie auch Intermédiaire des mathématiciens t. I, 1894, p. 215—216 (Fleury).

$1 + 2 + 6 + 6 + 5 + 3 + 2 + 0 + 1$, also eine gerade Zahl, d. h. die Aufgabe ist lösbar. Für Fig. 6b dagegen ist die Anzahl der Inversionen $4 + 4 + 4 + 4 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 2 + 2 + 2 + 1$, also ungerade und die Aufgabe daher unlösbar.

Man erkennt hiernach auch, daß das am Ende des vorigen § erwähnte Spiegelbild der normalen Stellung mit je 6 Inversionen in den 3 ersten Zeilen und 3 in der letzten nicht in die normale, dagegen in die Schlußstellung II übergeführt werden kann. Natürlich kann dann auch umgekehrt die Schlußstellung II in jene übergeführt werden, so daß wir also auch jene als Endstellung einer „unlösbaren“ Aufgabe erhalten können und unser Kriterium I daher auch folgendermaßen fassen können:

Kriterium I^a: Eine beliebige Stellung mit dem leeren Felde auf Platz 16 läßt sich bei gerader Inversionenzahl in die normale Stellung, bei ungerader in das Spiegelbild dieser überführen.

Die Frage, ob zwei beliebige Stellungen, die als leere Felder nicht, wie bisher, das Feld 16, sondern gleichfalls beliebige aufweisen, ineinander überführbar sind, läßt sich nach den obigen Ausführungen leicht folgendermaßen entscheiden:

Kriterium II: Bei beliebigen leeren Feldern in den Anfangsstellungen ändert man beide Stellungen mit wenigen Zügen so, daß das leere Feld für beide dasselbe ist, und bestimmt dann für diese beiden neuen Stellungen die Anzahl der Inversionen. Unterscheiden sich dieselben um eine gerade Anzahl, so sind beide Stellungen ineinander überführbar, sonst nicht.

Wünscht man eine Entscheidung ohne jede Änderung der Stellung, so ergibt sich leicht folgendes

Kriterium III: Man bestimme für die beiden Stellungen die Anzahl der Inversionen der 16 Steine, indem man das leere Feld mit Zahl 16 mit in Rechnung bringt; man denke sich ferner die 16 Felder schachbrettartig in 2 Farben ausgeführt und zwar das Feld unten rechts in beiden Fällen gleichfarbig, etwa weiß. Sind dann die leeren Felder für beide Stellungen gleichfarbig, so sind diese dann und nur dann ineinander überführbar,

wenn sich die Anzahlen ihrer beiderseitigen Inversionen um eine gerade Zahl unterscheiden; sind dagegen die leeren Felder von verschiedenen Farben, so müssen sich die Inversionenanzahlen um eine ungerade Zahl unterscheiden, wenn die Überführung möglich sein soll, und umgekehrt ist diese Bedingung auch hinreichend für die Überführung.

Im Anschluß hieran mag noch bemerkt werden, daß die Aufgabe des Spiels bisweilen in folgender Form ausgesprochen wird: Alle 16 Plätze sind mit Steinen besetzt und zwar in beliebiger Ordnung; es soll ein Stein fortgenommen und nun so geschoben werden, daß die natürliche Ordnung der Nummern erreicht wird, wenn der fortgenommene Stein zum Schluß wieder auf den leeren Platz gelegt wird; was für ein Stein ist fortzunehmen? Ist die Anzahl der Inversionen aller 16 Nummern in der Anfangsstellung gerade, so muß nach Kriterium III als fortzunehmender Stein offenbar ein solcher gewählt werden, der sich in der Anfangsstellung auf einem Felde der Farbe befindet, die er in der Endstellung einnehmen soll. Bei ungerader Anzahl von Inversionen ist die Überführung dagegen nur möglich, wenn der fortgenommene Stein in Anfangs- und Endstellung Felder verschiedener Farbe einnimmt. Man erkennt unschwer, daß die Aufgabe nicht lösbar ist, wenn die Anfangsstellung aus der natürlichen Ordnung dadurch hervorgehen würde, daß alle Nummern weißen Feldes mit denen schwarzen Feldes die Plätze wechseln. Die Anzahl der Inversionen ist dann gerade, aber kein Stein auf einem Felde seiner normalen Farbe.

Bei Feststellung der Inversionen dachten wir uns die Steine stets in einer bestimmten normalen Ordnung der Felder geschrieben, welche für den Fall der Fig. 6a z. B. war:

1, 4, 7, 9, 3, 5, 8, 14, 15, 13, 11, 10, 2, 12, 6, 16.

Es liegt jedoch auf der Hand, daß wir auch jede beliebige andere Ordnung wählen dürfen, nur muß natürlich für die beiden Stellungen, deren Überführbarkeit ineinander geprüft werden soll, jedesmal dieselbe Ordnung zu grunde gelegt werden. Die Kriterien II und III gelten dann unter dieser Erweiterung

unverändert weiter. Insbesondere wollen wir eine Anordnung hervorheben, bei der die Elemente zwar auch zeilenweise, jedoch nur in den ungeraden Zeilen von links nach rechts, in den geraden dagegen von rechts nach links aufgeführt werden sollen, also für das Beispiel der Fig. 6b in der Ordnung:

5, 6, 7, 8, 4, 3, 2, 1, 9, 10, 13, 14, 16, 11, 12, 15.

Bei dieser Anordnung ist die Anzahl der Inversionen, wenn man sich auf dem leeren Felde den Stein 16 denkt, für die normale Schlußstellung nach wie vor gerade, und es gilt daher bei dieser Anordnung auch das Kriterium I unverändert weiter; von dieser Anordnung werden wir unten noch Gebrauch machen und zwar unter dem Namen der „cyklischen Anordnung.“

§ 4. Das Puzzle mit Schranken.

Die Aufgabe unseres Spiels kann noch dadurch erschwert werden, daß zwischen einzelnen Feldern Schranken aufgeführt werden. In dem Falle des „elementaren Puzzle“ von 6 Feldern würde damit offenbar die Lösbarkeit aufhören, dagegen schon nicht mehr bei einem rechteckigen Puzzle von 8 Feldern mit der (Fig. 7) durch eine ausgezogene Linie angegebenen Schranke. Daß die Lösbarkeit des Problems durch die Schranke nicht beeinträchtigt wird, sieht man leicht folgendermaßen: Als

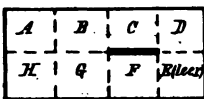


Fig. 7.

Reihenfolge der Felder mag die im vorigen § besprochene „cyklische Anordnung“ normieren; wir denken uns dabei den Cyklus geschlossen, d. h. $ABCDEFGH A$. Zunächst betrachten wir nur eine gleichzeitige Verschiebung aller Steine in dem einen oder anderen Sinne, bei der das leere Feld aber unverändert bleiben soll. Würden wir alle Steine um ein Feld, etwa im Uhrzeigersinne, verschieben und auch das leere Feld in dieser Richtung wandern lassen, so könnten wir uns die Veränderung so vorstellen, daß der fingierte Stein E der Reihe nach mit D, C, B, A, H, G, F den Platz wechselt und auf dem Platz

F bleibt. Dies wäre ein 7-maliger Platzwechsel zwischen je 2. Da aber *E* zum Schluss an die alte Stelle zurückkehrt, also nochmals mit *D* tauscht, so haben wir eine geradzahlige Anzahl solcher Platzwechsel. Die Anzahl der Inversionen ist also in der neuen Stellung gerade oder ungerade, je nachdem sie es ursprünglich war. Unsere Aufgabe wird nun stets darin bestehen, die Steine zunächst nur in dem Cyklus in die richtige Reihenfolge zu bringen; alsdann kann jeder durch Verschiebung aller sehr leicht an seinen richtigen Platz im Kasten gebracht werden. Ausser der cyklischen Verschiebung aller Steine ist nun noch eine Verschiebung des Cyklus *BCDEFG* für sich möglich, und deswegen ist man im stande, in dem Cyklus aller einen beliebigen Stein über zwei andere in der einen oder anderen Richtung springen zu lassen. Zu dem Ende brauchen wir offenbar nur zu zeigen, daß die Steine *A* und *H* in dem Cyklus sowohl von *B*, wie von *G* übersprungen werden können — wegen der möglichen Verschiebung aller liegt in dieser speziellen Annahme keinerlei Beschränkung. In der That springt *G* nun über *A* und *H*, wenn der Cyklus *BCDEFG* im Uhrzeigersinne um eine Stelle verschoben wird, und *B* macht diesen Sprung bei einer Verschiebung desselben Cyklus im umgekehrten Sinne. Übrigens gilt für diese Verschiebungen des Cyklus *BCDEFG* mit unverändertem leeren Felde natürlich auch, daß durch sie sich jedesmal die Zahl der Inversionen um eine gerade Anzahl ändert, und da nun die cyklischen Vertauschungen aller 8 Elemente und die der 6 die einzigen hier ausführbaren Operationen sind, so sieht man, daß die notwendige Bedingung für Überführbarkeit zweier Stellungen mit demselben leeren Felde ineinander die ist, daß beide eine gerade oder beide eine ungerade Anzahl Inversionen besitzen.

Diese Bedingung ist aber auch hinreichend. Denn wie wir sahen, läßt sich in dem Cyklus aller Steine jeder um 2 Plätze nach jeder der beiden Seiten verrücken. Das Glied nun, welches an die erste Stelle kommen soll, kann entweder, wenn es an ungerader Stelle im Cyklus steht, durch mehr-

maliges Verschieben um 2 Plätze an die erste Stelle gebracht werden, oder aber es kommt dadurch zunächst nur an die zweite Stelle und darauf, indem das erste Glied dann um 2 Plätze zurückgesetzt wird, an die erste Stelle. Dies Verfahren läßt sich offenbar dann weiter fortsetzen, bis alle Glieder außer den beiden letzten geordnet sind. Für diese beiden sind dann bezüglich ihrer Reihenfolge zwei Möglichkeiten vorhanden, von denen die eine oder die andere eintreten wird, je nachdem die Inversionenzahl ursprünglich gerade oder ungerade war (vgl. an entsprechender Stelle das Rasonnement in § 3, S. 357). Zwei in dieselbe Schlufsstellung überführbare Stellungen sind aber auch ineinander überführbar, womit unsere obige Behauptung bewiesen ist.¹⁾

So ergeben sich z. B. aus dem Cyklus 3, 2, 5, 1, 7, 6, 4 (Anzahl der Inversionen = 8) successive die Cyklen:

3, 1, 2, 5, 7, 6, 4
 1, 2, 3, 5, 7, 6, 4
 1, 2, 3, 5, 4, 7, 6
 1, 2, 3, 4, 7, 5, 6
 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,

dagegen aus 7, 3, 1, 5, 4, 2, 6 (11 Inversionen):

1, 7, 3, 5, 4, 2, 6
 1, 7, 3, 2, 5, 4, 6
 1, 2, 7, 3, 5, 4, 6
 1, 2, 3, 5, 7, 4, 6
 1, 2, 3, 4, 5, 7, 6.

Durch dieses Verfahren, das wir auch schon auf das elementare Puzzle (§ 2) hätten anwenden können, ist offenbar gezeigt, daß für unseren Fall des Puzzle mit Schranken die Kriterien des § 3 für die Überführbarkeit zweier Stellungen ineinander ohne weiteres fortbestehen. Für ein Puzzle von mehr als 8 Feldern können die Schranken entsprechend weiter

1) Dies Verfahren rührt von Herrn Laisant her (s. Lucas, Récréat. t. I, p. 210).

gezogen werden, z. B. für das von 12 Feldern, wie nachfolgende Figur es zeigt:

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	

Fig. 8a

oder
auch:

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	

Fig. 8b.

in welchem letzterem Falle jeder Stein immer über 4 resp. 6 andere im Cyklus springen kann, was unter denselben Bedingungen wie oben zum Ziele führt, da 2 und 3 zu 5 relativ prim sind.

Für das gewöhnliche Puzzle können wir offenbar, ohne daß dadurch die Theorie irgendwie modifiziert wird, z. B. folgende Schranken ziehen:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Fig. 9a.

oder:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Fig. 9b.

Wenn wir die Länge der Seite eines quadratischen Feldes mit 1 bezeichnen, so darf die aller Schranken im quadratischen Puzzle von 16 Feldern zusammengenommen höchstens = 7 sein.

Wir sehen jedenfalls, daß durch die gezogenen Schranken in einem rechteckigen Puzzle von $2 \cdot n$ Feldern die Lösbarkeitsbedingungen nicht modifiziert werden, vielmehr die alten Kriterien weiter bestehen, wenn es möglich ist, einerseits alle Steine cyklisch um je einen Platz zu verschieben, andererseits nur mit $2m$ Steinen eine solche cyklische Vertauschung vorzunehmen, während die übrigen ihr Feld beibehalten; dabei muß jedoch m zu $n - 1$ relativ prim sein, da dann und nur dann ein bestimmter Stein durch Sprünge über je $2m$ in dem

Cyklus der $2(n-1)$ anderen Steine es erreicht, daß der Gesamteffekt dieser Sprünge ein Vorrücken um 2 Plätze in der einen oder anderen Richtung ist.

Durch diese Formulierung werden wir nun auf das Kap. XI, § 14 erledigte Schachproblem geführt, nämlich einen Turm successive alle $m \cdot n$ Felder eines rechteckigen Brettes bestreichen und zum Ausgangsfeld zurückkehren zu lassen, wobei jedes Feld, über das er einmal hinweggegangen, als passiert gelten soll. Da dieses Problem für gerades mn stets lösbar war, so erhalten wir hier also, wenn nicht m und n beide ungerade sind, stets eine alle Felder des Brettes umfassende cyklische Reihe. Die Schranken dürfen offenbar nur so errichtet werden, daß jedes Feld noch wenigstens nach 2 Seiten Ausgänge besitzt, 2 Felder dagegen nach je 3 Seiten. Zählen wir daher eine Schranke von der Länge der Seite eines Feldes als „eine“ Schranke, so dürfen offenbar höchstens

$$(m-1)n + (n-1)m - (mn+1) = mn - (m+n+1)$$

Schranken gezogen werden.

Sind nun aber m und n ungerade, so erhalten wir nur einen $mn-1$ Felder umfassenden Cyklus; ein Eckfeld etwa bleibt abseits liegen, und wir müssen uns die Lösung der Aufgabe in der Weise ausgeführt denken, daß zunächst auf dieses Eckfeld der hingehörige Stein gebracht wird, und dann die weitere Ordnung erfolgt, wie wenn jenes Eckfeld nicht vorhanden wäre, also mit alleiniger Benutzung des Cyklus der $mn-1$ Felder. Hierzu ist aber notwendig und hinreichend, daß die beiden dem Eckfeld benachbarten Felder von diesem nicht durch Schranken getrennt sind und außerdem in ihrem Cyklus noch je 2 offene Ausgänge, mithin jedes der beiden 3 Ausgänge besitzt, so daß die Maximalzahl der zulässigen Schranken in diesem Falle um 1 geringer ist als für gerades mn .

Als allgemeine Formel für die Maximalanzahl der zulässigen Schranken ergibt sich hiernach der Ausdruck:

$$mn - (m+n+1) + \frac{(-1)^{m+n} - 1}{2}$$

§ 5. Das gegliederte Puzzle.

Diese Betrachtungen führen uns nun ganz naturgemäß zu einer anderen Art von Puzzle, bei der die rechteckige Form des Brettes verlassen ist und alle Felder nur je 2 Ausgänge, 2 dagegen deren je 3 besitzen, ein Fall, für welchen nach unseren obigen Ausführungen auch noch immer die alten Lösbarkeitsbedingungen weiter bestehen. Als Beispiel führen wir an den Fall der Fig. 10.

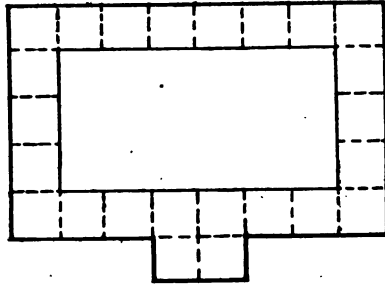


Fig. 10.

Hier haben wir nur *eine* cyklische Reihe; wir dürfen dem Brette aber auch solche Formen geben, daß sich die Felder nicht mehr alle zu einem

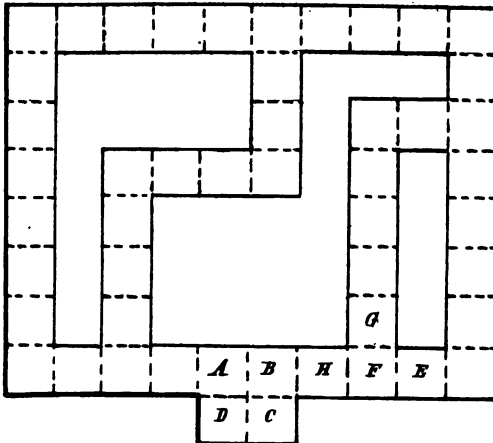


Fig. 11.

Cyklus zusammenfassen lassen.¹⁾ Fig. 11 mag einen solchen Fall veranschaulichen. Der Rangierplatz der Felder *ABCD*

1) Diese Erweiterung dürfte von Herrn Hermary herrühren (publiziert durch Lucas, *Récréat. mathém.* t. I, p. 213—220).

ermöglicht es, jeden Stein in seinem Cyklus 2 Felder vor- oder auch zurückzuschieben und zwar entweder in derselben

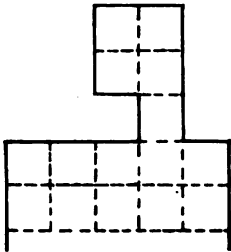


Fig. 12.

Weise wie in Fig. 7, wenn nämlich *A*, *B* dem betreffenden Cyclus auch angehören, oder aber, wenn z. B. *E* vor *F* und *G* gerückt werden soll, indem zunächst nach jenem Verfahren der Fig. 7 *E* vor *F* und *H* gerückt wird und dann in derselben Weise *E* vor *H* und *G*. Nur darf die Form des Brettes nicht derartig sein, daß die Kommunikation zwischen 2 sonst völlig getrennten Teilen nur durch ein Feld hergestellt wird (s. Fig. 12), wofern nicht die Spielregel dann dahin erweitert wird, daß mehrere (hier wenigstens 4) Felder leer bleiben.¹⁾

1) Hierher gehört auch ein Dr. T. Schroeter in Jena patentiertes „Vexirspiel“ (Patentschrift No. 26 845).

Kapitel XXI.

Das Dominospiel.

§ 1. Einleitung. Das Spiel mit 28 Steinen.

Über den Ursprung des allgemein verbreiteten Spiels scheint etwas Sicheres nicht bekannt zu sein, ebenso wenig über die Entstehung seines Namens. Nach einer Erklärung leitet der letztere sich daher, daß das auch in den Klöstern viel gepflegte Spiel dort von dem Sieger beim Setzen seines letzten Steines mit einem Ausruf des Dankes an den Himmel („Domino gratias!“) geschlossen zu werden pflegte. — Das Spiel tritt in verschiedenen Formen auf, insofern als die Zahlen auf den Steinen von 0 an bis 6, 7, 8 oder 9 gehen. Wir legen der weiteren Betrachtung die einfachste unter den gewöhnlich vorkommenden Formen zu grunde, nämlich diejenige, bei der auf den Steinen die Zahlen 0, 1 ... 6 vorkommen, so zwar, daß — wie bekannt — jede Zahl gerade einmal mit jeder anderen zusammen einen Stein bildet und außerdem noch jede Zahl auf je einem Stein doppelt vorkommt. In unserem Fall kommt daher jede Zahl 8mal im ganzen vor, also haben wir im ganzen mit Einrechnung der „Blanken“ 7·8 Zahlen, also $\frac{7 \cdot 8}{2} = 28$ Steine. Allgemein beträgt, wenn die Zahlen 0, 1 ... n sind, die Anzahl der Steine $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Die Hauptregel des Spiels besteht bekanntlich darin, daß nach Verteilung der Steine unter die Spieler diese durch abwechselndes Setzen je eines Steins eine „Kette“ von Steinen herstellen, in der 2 benachbarte Steine stets mit gleichen

Zahlen aneinander grenzen und nun derjenige als Sieger gilt, der zuerst alle seine Steine gesetzt hat.

Auf eine nähere Besprechung des Spiels verzichten wir und heben nur einen von Lucas angeführten merkwürdigen Fall¹⁾ hervor, in dem es bei 4 Spielern möglich ist, daßs jemand gewinnt, ohne daßs 2 der Spieler auch nur einen ihrer Steine haben setzen können: Bei Annahme von 4 Spielern erhält jeder 7 Steine. Bekommt nun zufällig der erste Spieler die Steine: 00, 01, 02, 03, 14, 15, 16 und der vierte die Steine: 11, 12, 13, 04, 05, 06 und als 7-ten einen beliebigen, so sieht man, daßs der zweite und dritte Spieler auf keinem ihrer Steine eine 0 oder 1 haben und auch der vierte auf seinem 7-ten beliebigen Stein nicht, und das Spiel gestaltet sich folgendermaßen: Der erste Spieler setzt Doppelt-Blank, der zweite und dritte können nicht setzen, während der vierte 04 oder 05 oder 06 setzt; auf jeden Fall kann darauf der erste so setzen, daßs an den beiden Enden 0 und 1 sind und der zweite und dritte wieder verzichten müssen, und dies wiederholt sich, bis schliesslich der vierte Spieler seinen sechsten Stein setzt und der erste darauf seinen 7-ten und letzten. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daßs dies oder ein gleichwertiges, d. h. nur durch Vertauschung der 7 Zahlen untereinander von ihm sich unterscheidendes Spiel

eintritt, ist jedoch sehr gering, nämlich $= \frac{7 \cdot 6 \cdot \binom{5}{2}}{\binom{28}{7} \cdot \binom{21}{6}}$, so daßs

der Fall durchschnittlich nur alle 152 977 968 Spiele einmal eintritt.

Bei einem Spiel von 28 Steinen, bei dem jede Zahl gerade 8mal vorkommt, ist es möglich, alle 28 Steine so zusammenzulegen, daßs immer Quadrate von je 4 gleichen Zahlen entstehen; Fig. 1²⁾ veranschaulicht dies. Man erkennt leicht, daßs die überstehenden Felder der Figur, in unserem Fall durch 00, 11, 22, 33 eingenommen, stets mit Doppelnummern besetzt sein müssen; im übrigen ist aber für die Anordnung ein sehr großer Spiel-

1) Récréat. math. t. II, p. 46.

2) s. Lucas, Récréat. t. II, p. 52.

raum gelassen. Zunächst gehen offenbar aus jeder Lösung durch bloßes Vertauschen der 7 Zahlen 0, 1 ... 6 untereinander $7! - 1 = 5039$ andere hervor; betrachten wir aber zwei in dieser Weise oder durch Spiegelung auseinander her-

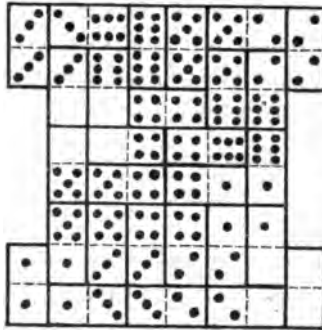


Fig. 1.

leitbare Anordnungen als gleichwertig, so giebt es nach Untersuchungen von Herrn Delannoy¹⁾ doch noch 34 wesentlich verschiedene Möglichkeiten und im ganzen 342 720, worauf wir hier jedoch nicht näher eingehen.

§ 2. Zusammenhängende Domino-Ketten.

Es entsteht die Frage, ob alle Steine des Domino für den Fall, daß das Spiel fortgesetzt wird, auch wenn jemand bereits gesiegt hat, zu einer fortlaufenden Kette aneinander gelegt werden können. Wenn überhaupt eine solche alle Steine umfassende Kette existiert, so wird die Zahl am Anfang der Kette jedenfalls dieselbe sein müssen wie die am Ende, da ja keine Zahl vor der anderen ausgezeichnet ist, die beiden Enden also aneinander passen müssen, um eine „geschlossene“ Kette ohne Anfang und Ende zu ermöglichen, in der keine Zahl mehr eine Sonderstellung einnimmt. Es ist klar, daß alle Steine nur dann zu einer solchen Reihe vereinigt werden

1) s. Lucas, Récréat. math. t. II, p. 53—61.

können, wenn jede Zahl eine gerade Anzahl von Malen vorkommt, da ja zwei aneinander grenzende Steine sich immer dieselbe Zahl zukehren. Falls die vorkommenden Zahlen $0, 1 \dots n$ sind, muß also n gerade sein; es kommt dann nämlich jede Zahl $(n + 2)$ -mal, also eine gerade Anzahl von Malen vor. Bei ungeradem n muß dagegen notwendig eine gewisse Anzahl von Steinen übrig bleiben und zwar, wenn eine „geschlossene“ Kette gebildet werden soll, mindestens so viele, daß auf den übrig bleibenden Steinen jede Zahl gerade einmal vorkommt, also mindestens $\frac{n+1}{2}$ Steine, so daß also höchstens $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n+1}{2} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ Steine zu einer geschlossenen Kette vereinigt werden können. Verlangt man dagegen nur eine „ungeschlossene“ Kette, so läßt sich offenbar ein Stein mehr placieren, indem man die geschlossene Kette an einer Stelle aufschneidet und dort noch von den vorher ausgeschiedenen Steinen den ansetzt, der die betreffende Zahl aufweist.

Entfernt man bei geradem n einen Stein aus dem Spiel, so lassen sich die übrigen zu einer Kette zusammenlegen, welche, wenn nicht jener Stein eine Doppelnummer ist, ungeschlossen ist und an den beiden Enden gerade die auf dem abgedruckten Stein verzeichneten Zahlen aufweist. Nimmt man also in einer Gesellschaft unbemerkt einen Stein mit zwei verschiedenen Nummern aus einem Spiel von geradem n fort und stellt die Aufgabe, alle Steine zu einer Kette zusammenzulegen, so kann man von vornherein sagen, welche Nummern an den Enden derselben auftreten werden, nämlich die beiden auf dem entfernten Stein vorkommenden.

Um die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, unsere 28 Steine zu einer Kette zu vereinigen, zu finden, dürfen wir zunächst von den Doppelnummern absehen.¹⁾ Denken wir uns

1) In dieser Form wurde die Aufgabe bereits 1852 in den Nouv. ann. de mathém. t. XI, p. 115 (Question 252) gestellt, aber damals nicht gelöst.

einmal die übrigen 21 Steine zu einer geschlossenen Kette aneinandergelegt, so kommt eine bestimmte Zahl, etwa die Null, darin an 3 verschiedenen Stellen, jedesmal auf 2 benachbarten Steinen, vor. Zwischen je zwei solche aneinander grenzende Nullen könnten wir dann die Doppel-Null einfügen, also an 3 Stellen, und entsprechend die anderen Steine mit Doppel-Nummer. Man sieht somit, daß sich durch Einfügen eines Steins mit Doppelnummer die Anzahl der Lösungen verdreifacht, also bei 2 Doppelnummern sich verneunfacht und durch Einreihung von 7 Doppelnummern sich mit 3^7 multipliziert. Eine geschlossene Kette wird ferner zu einer ungeschlossenen, wenn wir uns zwischen irgend 2 Steinen einen Einschnitt denken, so daß es also 28mal so viel ungeschlossene wie geschlossene Ketten giebt. Nennen wir nun die Anzahl der geschlossenen Ketten aus 21 Steinen ($n = 6$) ohne Doppelnummern x_6 , so giebt es

$3^7 \cdot x_6$ geschlossene Ketten aus allen 28 Steinen und

$3^7 \cdot 28 \cdot x_6$ ungeschlossene Ketten von je 28 Steinen.

Allgemein, wenn die Zahlen des Domino 0, 1 ... n (n gerade) sind, sind die entsprechenden Anzahlen

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{n+1} \cdot x_n \text{ resp. } \frac{(n+1)(n+2)}{2} \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^{n+1} \cdot x_n.$$

§ 3. Ketten von 6 und 15 Steinen.

Wir wenden uns jetzt dazu, diese Anzahlbestimmungen wenigstens für die einfacheren Fälle, nämlich $n = 2, 4, 6$, auszuführen. Für $n = 2$ giebt es natürlich nur eine geschlossene Kette, nämlich

$$\underline{00 - 01 - 11 - 12 - 22 - 20},$$

da wir, wie auch weiterhin stets, die durch Umkehrung aus ihr entstehende, d. h.

$$\underline{02 - 22 - 21 - 11 - 10 - 00}$$

nicht als verschieden davon ansehen wollen; wir haben also hier 6 ungeschlossene Ketten.

Wir wenden uns zu dem Fall $n = 4$, also einem Spiel von 15 Steinen. Wenn wir uns in einer geschlossenen Kette von Steinen ohne Doppelnummern die verschiedenen Zahlen, mit denen je 2 Steine aneinander grenzen, je einmal aufgeschrieben denken, so können wir die Fragestellung auch so aussprechen: Auf wieviel Arten ist es möglich, die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, jede zweimal, so in einer Reihe zu schreiben, daß weder 2 gleiche Zahlen irgendwo aufeinander folgen noch zwei an einer Stelle nebeneinander stehende Zahlen an einer zweiten Stelle benachbart sind, wobei die erste und letzte Zahl gleichfalls als benachbart gelten? Diese Bedingungen haben offenbar zur Folge, daß jede Zahl jeder anderen gerade einmal benachbart ist. Die erste Zahl, welche wir schreiben, dürfen wir ohne Beschränkung 0 nennen und die zweite und dritte, welche nach unseren Regeln von der ersten verschieden sein müssen, 1 und 2. Als vierte Zahl kann nun entweder wieder 0 oder eine noch nicht dagewesene Zahl, welche wir dann 3 nennen, auftreten. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens kommt man im ganzen zu folgenden 22 wesentlich verschiedenen Fällen: ¹⁾

I. 0120314234	XII. 0123140342
II. 0120314324	XIII. 0123142034
III. 0120324134	XIV. 0123142043
IV. 0120324314	XV. 0123143024
V. 0120341324	XVI. 0123143042
VI. 0120342314	XVII. 0123402413
VII. 0123024134	XVIII. 0123403142
VIII. 0123024314	XIX. 0123413024
IX. 0123041342	XX. 0123413042
X. 0123043142	XXI. 0123420314
XI. 0123140243	XXII. 0123420413.

Aus jedem dieser Fälle ergeben sich nun durch Permutation unserer 5 Buchstaben $5! - 1$ neue Fälle; von diesen

1) s. Lucas, Récréat. t. II. p. 70.

5! Ketten sind jedoch wieder immer je zwei nach dem Obigen als zusammenfallend zu betrachten, also z. B.

01 — 12 — 20 — 03 — 31 — 14 — 42 — 23 — 34 — 40 und
04 — 43 — 32 — 24 — 41 — 13 — 30 — 02 — 21 — 10,

von denen der erstere der Fall I, der zweite aus XIII durch die Permutation $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ hervorgeht. Wir haben also im ganzen $\frac{5! \cdot 22}{2}$ ungeschlossene Ketten ohne Doppelnummern.

In jeder ungeschlossenen Kette können nun von den 5 Doppelnummern 4 an je 2 Stellen, eine jedoch immer an 3 Stellen, nämlich vorn, hinten und noch an einer Stelle in der Reihe, placiert werden. Durch Einreihung der Doppelnummern multipliziert sich unsere Zahl also noch mit $3 \cdot 2^4$, so daß wir also im ganzen

$$\frac{22 \cdot 5!}{2} \cdot 3 \cdot 2^4 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 63360$$

ungeschlossene Ketten haben.¹⁾ Im nächsten § werden wir diese Zahl noch nach einem anderen Verfahren ermitteln und dabei auch zugleich das hier nur implicite vorkommende x_4 (s. § 2) explicite angeben.

§ 4. Methode Tarry's.

Die Aufgabe, die Anzahl aller geschlossenen Ketten ohne Doppelnummern zu bestimmen, können wir nach einer Bemerkung von Herrn Laisant²⁾ auch so aussprechen: Gegeben sind 5 Punkte 0, 1, 2, 3, 4, deren jeder mit jedem anderen durch eine Linie verbunden ist, so daß die Linien also ein Fünfeck mit dessen sämtlichen Diagonalen bilden; auf wieviel Arten ist es möglich, diese sämtlichen Linien hintereinander zu durchlaufen, jede gerade einmal?

1) Bezüglich des Falls $n=6$, welchen wir in § 5 nach einer anderen Methode noch eingehend behandeln werden, verweisen wir hier auf eine Notiz von Herrn Flye Sainte-Marie (*Intermédiaire des mathématiciens* t. I, 1894, p. 25).

2) s. Lucas, *Récréat.* II, p. 229 (Note I) und IV, p. 126.

Auf grund dieser Bemerkung gestaltet sich die weitere Untersuchung nach einer von G. Tarry¹⁾ ausgebildeten Methode folgendermaßen: Von den 4 in 0 mündenden Linien (s. Fig. A)

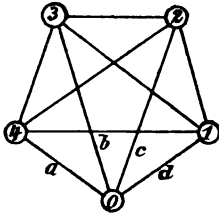


Fig. A.

werden entweder a, b einerseits und c, d andererseits unmittelbar hintereinander in der einen oder anderen Richtung passiert oder aber a, c einerseits und b, d andererseits oder schließlich a, d einerseits und b, c andererseits. Betrachten wir zunächst den ersten Fall, so würde also hier unsere geschlossene Bahn von 4 nach 0 und dann nach 3, resp. auch

gerade umgekehrt führen und andererseits von 1 nach 0 und von dort nach 2, resp. umgekehrt; wir erhalten daher auch alle dieser Bedingung genügenden Lösungen, wenn wir unsere Fig. A ersetzen durch Fig. B. Entsprechend erhalten wir in den beiden anderen Fällen als Ersatz die Figuren C und D.

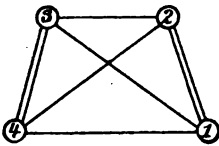


Fig. B.

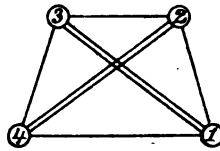


Fig. C.

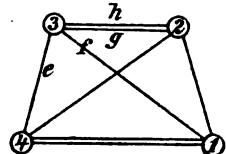


Fig. D.

Addieren wir also die Anzahlen der Lösungen, die wir für die Durchlaufung jeder dieser 3 Figuren (B, C, D) erhalten, so ist dies die Anzahl der Lösungen der ursprünglichen Aufgabe.

Nun sieht man aber leicht, daß diese 3 Figuren nicht wesentlich voneinander verschieden sind, da es doch nur auf die innere Structur, nicht aber das äußere Aussehen hier ankommt und wir in allen 3 Fällen 2 Paare von Punkten haben so, daß ein Paar immer durch einen Doppelweg verbunden ist, während sonst von jedem Punkt zu jedem anderen ein einfacher Weg führt.

1) Assoc. franç. pour l'avanc. des sciences. Congrès de Nancy XV, 1886, t. II, p. 49—53.

Wir brauchen unserer weiteren Betrachtung also nur noch eine der 3 Figuren, etwa Fig. *D*, zu grunde zu legen und erhalten die gesuchte Zahl als das Dreifache der Lösungen, welche wir für die Konfiguration der Fig. *D* bekommen. Von dieser Konfiguration gehen wir nun wieder zu einer einfacheren über, indem wir etwa den Punkt 3 aussondern. Dieser kann passiert werden, indem man entweder *e, g* einerseits und *f, h* andererseits oder *e, h* einer- und *f, g* andererseits verbindet, was beides zu Fig. *E* führt, oder aber, indem man *e, f* einerseits und *g, h* andererseits zusammennimmt; letzterer Fall

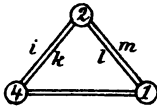


Fig. E.

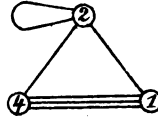


Fig. F.

führt zu Fig. *F*, in der wir die von 2 ausgehende und nach dort zurückführende Bahn *g, h* durch eine „Schleife“ darstellen. Bezeichnen wir nun die Anzahlen der Lösungen für die Konfigurationen *A, D, E* und *F* kurz bezw. mit *A, D, E* und *F*, so haben wir also:

$$D = 2E + F \quad \text{und}$$

$$A = 3D = 3(2E + F).$$

Beginnen wir die Durchlaufung der Fig. *F* in der Weise, daß wir von 4 nach 2 gehen (diese Richtung dürfen wir ohne Beschränkung vorschreiben, da wir ja eine Richtungs-umkehrung der ganzen Durchlaufung nicht als wesentliche Änderung ansehen wollten), so bieten sich in 2 für das Fortschreiten zunächst 2 Möglichkeiten, insofern die Schleife in der einen oder anderen Richtung durchlaufen werden kann; die Konfiguration mit Schleife besitzt also doppelt so viele Lösungen wie eine ihr im übrigen kongruente ohne diese Schleife, und es mag schon hier darauf hingewiesen werden, daß die Zugabe von zwei Schleifen die Anzahl der Lösungen natürlich vervierfacht etc. Nach Durchlaufung der Schleife kommen wir dann nach 1 und haben hier für das Fortschreiten

3 Möglichkeiten und dann, nachdem wir zu 4 gekommen, haben wir nochmals wieder 2 Wege, um zu 1 zu kommen, wonach dann nur noch ein Weg übrig bleibt, um nach 4 zurückzukehren und die Durchlaufung zu beschließen. Wir haben also im ganzen offenbar $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ Durchlaufungen für die Konfiguration F , d. h. $F = 12$.

Die Konfiguration E geht nun durch Ausscheidung des Punktes 2 entweder in G über, wenn wir i, k einer- und l, m



Fig. G.

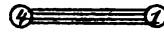


Fig. H.

andererseits zusammennehmen, oder aber in H und zwar sowohl, wenn wir i, l einer- und k, m andererseits, als auch, wenn wir i, m einer- und k, l andererseits verbinden. Es ist also $E = G + 2H$.

Wenn man nun in G von 4 nach 1 längs einer der Linien geht, so bieten sich in 1 für das Fortschreiten wegen der zweifachen Durchlaufungsrichtung der Schleife 2 Möglichkeiten, ebenso, nachdem man dann längs der zweiten Linie wieder nach 4 zurückgekehrt ist, für die andere Schleife, so daß also $G = 4$ ist. Durchläuft man in H zunächst eine der Linien, so ergeben sich für die Fortsetzung 3 Möglichkeiten und für die weitere noch 2, so daß $H = 6$ ist, also $E = 16$ und $A = 3(2E + F) = 132$. Wenn aber dies die Anzahl der geschlossenen Ketten ohne Doppelnummern, also das x_4 unseres § 2, ist, so ist die Zahl der ungeschlossenen Ketten mit Doppelnummern $15 \cdot 2^5 \cdot 132 = 63\,360$, eine Zahl, die schon im vorigen § auf andere Weise ermittelt war.

§ 5. Ketten von 28 Steinen.

Fassen wir nun schließlic den Fall eines Spiels von 28 Steinen ins Auge, so haben wir uns also die Frage vorzulegen, auf wieviel Arten das System der Seiten und Diagonalen

eines 7-Ecks durchlaufen werden kann. Dabei dürfen wir uns nach den ausführlichen Darlegungen des vorigen § auf eine kurze Darstellung der Entwicklung beschränken. Zunächst wollen wir nur daran erinnern, daß, wie schon oben bemerkt war, das Auftreten einer Schleife die Zahl der Lösungen verdoppelt, das von zweien sie vervierfacht etc.; wir haben daher die Schleifen überall in den Figuren gleich fortgelassen, haben aber natürlich die Zahlenkoeffizienten der betreffenden Konfigurationen mit den entsprechenden Potenzen von 2 multipliziert.

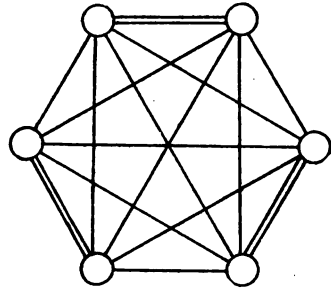


Fig. J.

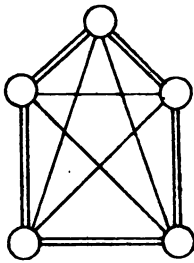


Fig. P₁.

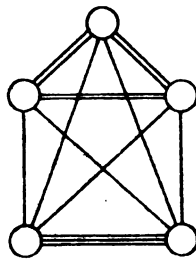


Fig. P₂.

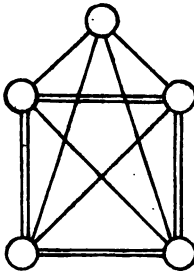


Fig. P₃.

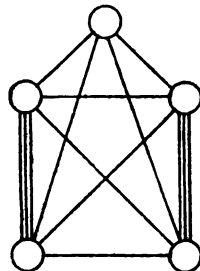


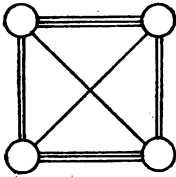
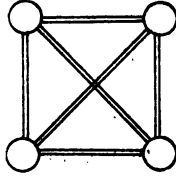
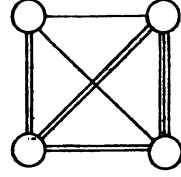
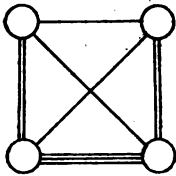
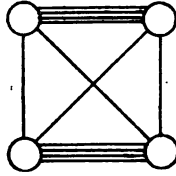
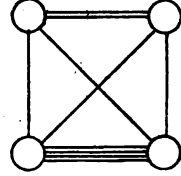
Fig. P₄.

Zunächst sondern wir von dem 7-Eck wieder eine Ecke aus; die 6 in ihr mündenden Linien können wir auf 15 Arten

zu je 2 verbinden und kommen dann offenbar in jedem der Fälle zu der Konfiguration J , so daß $x_6 = 15$. J ist. Sondern wir wieder eine Ecke aus und nehmen die etwaigen Schleifen fort, so kommen wir zu den Figuren P_1, P_2, P_3, P_4 und zwar ist

$$J = 8P_1 + 4P_2 + 8P_3 + 4P_4.$$

Für die Berechnung der Zahlenkoeffizienten ist hier zu beachten, daß z. B. bei dem Übergang von J zu P_4 eine Schleife entsteht und der Punkt, von dem diese ausgeht, wegen der 4 in ihm mündenden Linien bei der Wanderung zweimal passiert wird, die Durchlaufung der Schleife also an 2 Stellen und jedesmal in zweierlei Richtung erfolgen kann.

Fig. Q_1 .Fig. Q_2 .Fig. Q_3 .Fig. Q_4 .Fig. Q_5 .Fig. Q_6 .

Der Übergang von den 5 Ecken zu 4 führt zu den Konfigurationen $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$, so zwar, daß

$$P_1 = 6Q_1 + 4Q_2 + 16Q_3 + 16Q_4$$

$$P_2 = 8Q_1 + 16Q_3 + 2Q_5 + 16Q_6$$

$$P_3 = 2Q_1 + Q_2$$

$$P_4 = 2Q_1 + Q_5$$

ist.

Von hier kommen wir dann zu den Dreiecken T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 und zwar ist

$$Q_1 = 6T_1 + 24T_2 + 48T_3$$

$$Q_2 = 8T_1 + 24T_2 + 64T_4$$

$$Q_3 = 2T_1 + 4T_2$$

$$Q_4 = 2T_2 + 4T_3$$

$$Q_5 = 48T_2 + 24T_5$$

$$Q_6 = 2T_2 + 2T_5$$

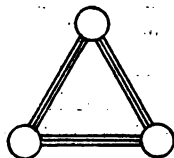


Fig. T_1 .

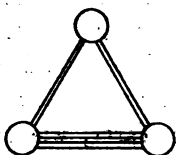


Fig. T_2 .

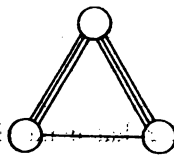


Fig. T_3 .

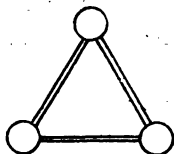


Fig. T_4 .

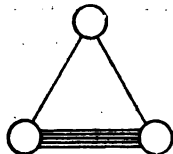


Fig. T_5 .

und schließlich zu den Konfigurationen D_1, D_2, D_3 , wo

$$T_1 = 6D_1 + 144D_2$$

$$T_2 = 2D_1 + 16D_2$$

$$T_3 = 12D_2$$

$$T_4 = 2D_2 + 4D_3$$

$$T_5 = D_1$$

ist.



Fig. D_1 .

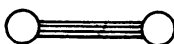


Fig. D_2 .

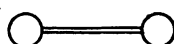


Fig. D_3 .

Nun ist $D_1 = 5! = 120$; $D_2 = 3! = 6$; $D_3 = 1$, also

$$T_1 = 1584, T_2 = 336, T_3 = 72, T_4 = 16, T_5 = 120$$

$$Q_1 = 21\ 024, Q_2 = 21\ 760, Q_3 = 4512$$

$$Q_4 = 960, Q_5 = 19\ 008, Q_6 = 912$$

$$P_1 = 300\ 736, P_2 = 292\ 992$$

$$P_3 = 63\ 808, P_4 = 61\ 056$$

und

$$J = 4\,332\,544,$$

also

$$x_6 = 64\,988\,160.$$

Die Anzahl aller ungeschlossenen Ketten mit Doppelnummern ist also $28 \cdot 3^7 \cdot 64\,988\,160$

$$= 3\,979\,614\,965\,760 = 2^{12} \cdot 3^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 4231$$

resp. das doppelte, wenn man, wie die meisten Autoren thun, die durch direkte Umkehrung ineinander übergehenden Fälle als verschieden ansieht. Diese Zahl wurde zuerst von Reifs¹⁾ bestimmt, jedoch nach einer wesentlich komplizierteren Methode. Später hat dann Herr G. Tarry, wie schon erwähnt, auf grund der oben (S. 373) angegebenen Laisant'schen Bemerkung in der in § 4 erläuterten Weise diese Untersuchung ausgeführt²⁾ bis zu einem Spiel von 9 Zahlen 0, 1 ... 8, also von 45 Steinen. Die Anzahl der Lösungen ist hier

$$2^{15} \cdot 3^{11} \cdot 5^3 \cdot 711 \cdot 40\,787 = 455\,760\,028\,510\,617\,600.$$

1) *Annali di Matematica pura ed applicata* Bd. V, p. 63—120 Mailand 1871.

2) *Assoc. franç. pour l'avanc. des sc. Congrès de Nancy XV, 1886*, t. I, p. 81; t. II, p. 49—53. Nach Lucas, *Récréat.* IV, p. 126 war die Richtigkeit der Reifs'schen Zahl aufer von Tarry auch von dem Abt Jolivald (1885) bestätigt gefunden. Wie Herr Le Cointe trotzdem ohne jede Begründung die Richtigkeit der Reifs'schen Zahlen anzweifeln kann (*Cosmos* XVI, 1890, p. 294), ist unerfindlich. — Die citierte Tarry'sche Arbeit behandelt nur den Fall der 28 Steine; wegen des obigen Resultats der Herren Tarry und Jolivald für $n = 8$ s. Lucas, *Récréat.* t. IV, p. 128.

Kapitel XXII.

Zeit und Kalender.

§ 1. Gemeine und Schaltjahre.

Bei der Abhängigkeit alles organischen Lebens von der Wärme und Licht spendenden Sonne ist es selbstverständlich, daß die doppelte Bewegung unseres Planeten zu seinem Centralkörper uns eine Einteilung unserer Zeit diktiert. Die Rotation der Erde um ihre Achse führte mit Notwendigkeit zur Einteilung der Zeit in Tage, ihre Revolution um die Sonne, wenn auch zunächst nicht als eine Eigenbewegung der Erde erkannt, lieferte den Begriff des Jahres. Eine genaue Definition dieser beiden Zeitbegriffe zu geben, um aus ihnen invariable Zeiteinheiten herzuleiten, sowie das Verhältnis dieser Zeitmase zu einander genau zu fixieren, war Aufgabe der Astronomie. Ohne auf die Materie und ihre geschichtliche Entwicklung weiter einzugehen, wollen wir hier nur in Betracht ziehen das mittlere tropische Sonnenjahr, d. h. die mittlere Zeit zwischen 2 aufsteigenden Durchgängen des Sonnenmittelpunkts durch den Äquator der Erde, und den mittleren Sonnentag, das Mittel aus den an Dauer im allgemeinen ungleichen Sonnentagen des ganzen Jahres. Bei dieser Festsetzung ergibt sich ein tropisches Sonnenjahr zu 365 Tagen 5 Stunden 48 Min. 47,33 Sek. = 365,2422 Tagen.

Rechnen wir also das Jahr zu 365 Tagen, so rechnen wir es um 0,2422 Tag zu kurz. Dies war der Grund dafür, daß schon der „Julianische“ Kalender der Römer alle 4 Jahre einen Tag, den Schalttag, einschaltete. Damit ist aber wieder zu-

viel eingeschaltet, denn bei einer Differenz von 0,2422 Tag pro Jahr beträgt dieselbe für 4 Jahre nur 0,9688 Tag. Schiebt man also alle 4 Jahre einen ganzen Tag ein, so hat man in 4 Jahren 0,0312 Tag zu viel gerechnet; im Laufe von 400 Jahren ver Hundertfacht sich dieser Unterschied, beträgt also dann 3,12 Tage. Man würde also in einem Zeitraum von 400 Jahren 3,12 Tage zu viel rechnen; in der That war der Julianische Kalender mit diesem Fehler behaftet, und noch heute rechnet bekanntlich die griechisch-orthodoxe Kirche so. Es ist unbekannt, daß Papst Gregor XIII. in einer Bulle vom 1. III. 1582 hier reformierend eingriff und bestimmte, daß alle 400 Jahre von den üblichen Schalttagen 3 fortfallen sollten und zwar in den auf 00 ausgehenden und nicht durch 400 teilbaren Jahren, also z. B. in den Jahren 1700, 1800 und 1900, nicht aber 2000. Durch diese Gregorianische Reform, welche natürlich zugleich das bis dahin Versäumte nachträglich verbesserte und heute überall — mit der schon oben erwähnten Ausnahme — acceptiert ist, hat sich zwischen dem Julianischen oder „Kalender alten Stils“ und dem Gregorianischen oder „Kalender neuen Stils“ jetzt bereits eine Differenz von 13 Tagen ergeben, welche sich in den Jahren 2100, 2200 und 2300 weiter um je einen Tag vergrößern wird, wenn nicht, wie jedenfalls zu erwarten steht, der Julianische Kalender bis dahin seine letzte Domäne lange verloren haben wird. Bei Ausscheidung jener 3 Schalttage ist der 400jährige Zeitraum des Gregorianischen Kalenders aber immer noch um 0,12 Tag zu lang bemessen, ein Fehler, der im Laufe von 3500 Jahren mehr als einen Tag ausmacht und daher nach Verlauf dieser Zeit noch ein weiteres Jahr mit einer durch 4 teilbaren Jahreszahl zu einem Gemeinjahr stempeln wird.

§ 2. Immerwährender Kalender.

Da 365, durch 7 geteilt, den Rest 1 läßt, so fällt ein bestimmtes Datum in 2 aufeinanderfolgenden Jahren nie auf denselben Wochentag, vielmehr fällt bekanntlich ein Datum, das in einem Jahre z. B. auf einen Sonntag fiel, im nächst-

folgenden Jahr auf einen Montag resp. infolge eines Schalttags auf einen Dienstag.¹⁾ Die Frage, auf welchen Wochentag ein bestimmtes Datum fällt, zu beantworten ist Aufgabe des Kalenders. Wir geben nun auf der folgenden Seite einen immerwährenden Kalender²⁾ und erläutern die Benutzung desselben zunächst an einem Beispiel: Es soll bestimmt werden, auf welchen Tag das Inkrafttreten des Gregorianischen Kalenders (15. X. 1582) fiel. Wir suchen zu dem Zwecke in den Tabellen A, B, C, D bezw. Tag (15), Monat (Oktober), Jahrhundert (15) und Jahr (82) auf, addieren die daneben (resp. bei D darüberstehenden) fettgedruckten Zahlen, d. h. also hier $1 + 5 + 3 + 4 = 13$, suchen dann die 13 in Tab. A unter den Zahlen mit gewöhnlichem Druck auf und finden hiernach als zugehörigen Wochentag: Freitag. Natürlich könnte man jetzt zu einem beliebigen anderen Datum den Wochentag auch ohne Tabelle finden, indem man zählt, wie viele Tage seit Beginn dieser Zeitrechnung, also seit 15. X. 1582, bis zu jenem verflossen sind, die gefundene Zahl durch 7 dividiert, d. h. die vollen Wochen ausscheidet und aus dem Rest der Division unter Berücksichtigung des 15. X. 1582 als eines Freitags den Wochentag ermittelt. Diese Arbeit wird nun durch die Tabellen gewissermaßen ausgeführt, indem zunächst in Tab. A diejenigen Monatstage, welche sich um ganze Vielfache von 7 unterscheiden, in dieselbe Zeile gestellt sind; in Tab. B muß, wenn z. B. die für März charakteristische Zahl 1

1) Ein neuerdings von Herrn Auric (Assoc. franç. pour l'avanc. des sc. Congrès de St. Étienne 1897, t. II, p. 172) vorgeschlagener Reform-Kalender bezweckt eine unveränderte Lage der Wochentage, indem in jedem Jahre der überzählige Tag und in Schaltjahren auch noch der Schalttag in besonderer Benennung außerhalb der Wocheneinteilung geführt werden.

2) Aus der großen Zahl der — jedoch nur äußerlich in der Form verschiedenen — Anordnungen, welche hier möglich sind, wählen wir die obige, weil uns dieselbe für das Verständnis sehr zugänglich zu sein scheint. Ein für den praktischen Gebrauch sehr zweckmäßiger „Ewiger Kalender“, verbunden mit Festkalender, ist herausgegeben von Herrn Schubert, Hamburg, Verlag der Herold'schen Buchh.

Tabelle A (Tage)		Tabelle B (Monate)		Tabelle C (Jahrh. neuen Stils)		Tabelle C' (Jahrh. alten Stils)		Tabelle D (Jahre)							
1 Sonntag	8 15 22 29	März	1	15 19 23 27 31	3	0	7 14 21	0	0	1	2	3	4	5	6
2 Montag	9 16 23 30	April	4	16 20 24 28 32	2	1	8 15 22	6	00	01	02	03	08	09	10
3 Dienstag	3 10 17 24 31	Mai	6	17 21 25 29 33	0	2	9 16 23 5	06	07	12	13	14	15	16	
4 Mittwoch	4 11 18 25	Juni	2	18 22 26 30 34	5	3	10 17 24 4	17	18	19	20	21	22		
5 Donnerstag	5 12 19 26	Juli	4			4	11 18 25 3	17	28	29	30	31	32	33	
6 Freitag	6 13 20 27	August	0			5	12 19 26 2	28	34	35	40	41	42	43	44
7 Sonnabend	7 14 21 28	September	3			6	13 20 27 1	28	45	46	47	48	49	50	51
		Oktober	5					34	51	52	53	54	55	56	57
		November	1					45	56	57	58	59	60	61	62
		Dezember	3					56	62	63	68	69	70	71	72
		Januar*)	6					62	73	74	75	76	77	78	79
		Februar*)	2					73	79	80	81	82	83	84	85
								79	84	85	86	87	88	89	90
								90	91	92	93	94	95	96	97
								96	97	98	99				

*) Januar und Februar sind stets als zu dem vorhergehenden Jahre zugehörig zu betrachten, z. B. der Januar 1899 als zum Jahre 1898 gehörig.

ist, dieselbe für April $1 + 3 = 4$ sein, weil zwischen dem x -ten März und dem x -ten April 31 Tage, also 3 Tage und eine Anzahl voller Wochen liegen u. s. w. Für die Tab. D ist zu beachten, daß die Jahre, welche mit demselben Wochentag beginnen, derselben Kolonne angehören; die charakteristischen Zahlen der aufeinanderfolgenden Jahre wachsen im allgemeinen um 1, nur wenn das zweite der beiden ein Schaltjahr ist, um 2; streng genommen müßte im letzteren Fall ein Unterschied statuiert werden bezüglich der Monate Januar und Februar einerseits und der übrigen andererseits, eine größere tabellarische Einfachheit erreicht man jedoch durch den Kunstgriff, die Monate Januar und Februar stets dem vorhergehenden Jahre zuzurechnen, also als Anfang des Jahres gewissermaßen den 1. März anzusehen, so daß als das Jahr von 366 Tagen das dem eigentlichen Schaltjahr vorhergehende erscheint. Die Tab. D enthält übrigens natürlich einen Cyklus von 28 Elementen, da die Jahre 28—55 offenbar genau dasselbe Bild bieten wie die Jahre 00—27. Was schließlich die Tab. C anlangt, so ist zu beachten, daß das Jahrhundert für gewöhnlich $365 \cdot 100 + 24$ Tage zählt, eine Zahl, die, durch 7 geteilt, den Rest 5 läßt. Die charakteristischen Zahlen der Tab. C wachsen daher um je 5 zwischen 16 und 17, 17 und 18, 18 und 19, dagegen um 6 zwischen 15 und 16, weil das Jahr 1600 ja um einen Tag länger ist als 1700, 1800 und 1900. Für die entsprechende Tabelle C' des alten Stils ist dieser Unterschied natürlich gleichmäßig 6; dabei sind natürlich überall die kleinsten Reste nach 7 zu nehmen.

Für die Bestimmung des Wochentags zu einem gegebenen Datum kann natürlich auch eine entsprechende Formel statt der angegebenen Tabellen aufgestellt werden. Ist das gegebene Datum der q -te Tag des m -ten Monats im Jahre $100 \cdot I + k$ ($k < 100$), so ergibt sich nach Zeller¹⁾ der Wochentag durch die Formel

1) Chr. Zeller, Problema duplex Calendarii fundamentale. Bull. de la soc. mathém. de France XI, 1882/83, p. 59—61, vgl. a. v. dems. „Kalender-Formeln“. Acta mathem. IX, 1887, p. 131—136 und Mathem.-naturwiss. Mitteilungen, herausgeg. v. Böklen. II, Stuttgart 1885, p. 54—58.

$$q + \frac{(m+1)26}{10} + k + \frac{k}{4} - I - 2$$

für den Julianischen und durch

$$q + \frac{(m+1)26}{10} + k + \frac{k}{4} + \frac{I}{4} - 2I$$

für den Gregorianischen Kalender. Die Monate Januar und Februar sind dabei als 13. resp. 14. des vorhergehenden Jahres zu rechnen. Von den diversen Brüchen der Formeln sind nur die ganzzahligen Teile und von der erhaltenen Summe der Rest nach 7 zu nehmen. Dieser Rest giebt dann an, auf den wievielten Tag der Woche das betreffende Datum fiel. Für das oben gebrauchte Beispiel 15. X. 1582 wäre $q = 15$, $m = 10$, $I = 15$, $k = 82$, also erhielte man $15 + 28 + 82 + 20 - 17 - 3$, und diese Zahl giebt, durch 7 geteilt, den Rest 6. Der betreffende Tag ist also der 6te der Woche, d. h. Freitag. Die Komposition der Formeln ist so durchsichtig, daß wir zur Erklärung nur bemerken wollen, daß in dem zweiten Glied der Bruch $\frac{26}{10}$ gewählt werden mußte, um die Differenz von 2 resp. 3 in der Tab. B zwischen den einzelnen Monaten überall richtig zum Ausdruck zu bringen; die Werte von m liegen, wie schon gesagt, zwischen 3 und 14 einschließlic der Grenzen. Für ein Datum des zwanzigsten Jahrhunderts geben diese Formeln für den alten und den neuen Stil die thatsächliche Differenz beider, 13 (s. S. 382). Diese Differenz vergrößert sich dann wegen des Unterschiedes in den Gliedern $2I$ und I der beiden Formeln mit jedem neuen Jahrhundert um je 1, aufser wenn I durch 4 teilbar ist, wo durch das Glied $\frac{I}{4}$ jener Unterschied wieder kompensiert wird.

Um noch eine Anwendung unserer Tabellen zu geben, wollen wir die mehrfach¹⁾ behandelte Frage ins Auge fassen:

1) z. B. Zach's *Corresp. astron.* X, 1824, p. 380—383; Matzka, *Analytische Auflösung dreier Aufgaben der Calendarographie.* Crelle's *Journ.* III, 1828, p. 341; G. A. Jahn, *Auflösung einiger Aufgaben aus der Ca-*

„In welchen Jahren fallen 5 Sonntage in den Februar?“ Selbstverständlich kann sich dies nur in einem Schaltjahr ereignen und auch dann nur, wenn der 29te und damit auch 1te Februar Sonntage sind. In welchen Jahren des 20sten Jahrhunderts ist dies nun der Fall? Die Tabellen A, B, C liefern uns für 1. Februar 19.. die Summe $1 + 2 + 3 = 6$. Hierzu kommt nun noch aus Tabelle D die betreffende Zahl für das laufende Jahr des Jahrhunderts; soll nun unser Datum ein Sonntag sein, so muß offenbar aus Tabelle D noch eine 2 hinzukommen. Es kommen also von der Spalte 2 der Tab. D diejenigen Jahre in Betracht, in denen der Februar 29 Tage hat, wobei die Zurechnung des Monats Februar zum vorhergehenden Jahre zu berücksichtigen ist. Es sind daher die Zahlen 19, 47, 75 zu nehmen, d. h. die Jahre 1920, 1948, 1976 und auch nur diese haben im 20sten Jahrhundert je 5 Sonntage im Februar.

§ 3. Berechnung des Osterdatums.

Das Konzil von Nicäa setzte bekanntlich mit Rücksicht auf die Überlieferung, daß die Auferstehung Jesu einem Vollmond nach dem Frühlingsäquinoktium folgte, das Osterfest auf den ersten Sonntag nach Vollmond nach Frühlingsanfang fest.

Für die hiernach nicht ganz einfache Berechnung des Osterdatums hat Gauß¹⁾ bekanntlich eine Methode angegeben, welche auch für das nicht astronomisch gebildete und mit den diversen, sonst hierbei gebräuchlichen technischen Ausdrücken, wie „Epakte“, „guldene Zahl“, „Sonnenzirkel“ etc., nicht vertraute Publikum leicht verständlich ist. Sein Verfahren besteht in folgendem:

lendarigraphie. Crelle's Journal IX, 1832, p. 143; Piper, Zur Kirchenrechnung. Crelle's Journal XXII, 1841, p. 114; Educational Times Reprints vol. 68, p. 355.

1) „Berechnung des Osterfestes“. Monatl. Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde, herausgeg. v. Frhr. v. Zach. August 1800 = Werke VI, p. 73—79.

Es entstehe aus der Division	durch	der Rest
der Jahreszahl	19	a
„	4	b
„	7	c
der Zahl $19a + M$	30	d
„ „ $2b + 4c + 6d + N$	7	e

so fällt Ostern auf den $(22 + d + e)$ -ten März resp. den $(d + e - 9)$ -ten April. Dabei sind M und N Zahlen, welche im Julianischen Kalender für immer, im Gregorianischen hingegen allemal wenigstens 100 Jahre hindurch unveränderliche Werte haben, und zwar ist in jenem $M = 15$, $N = 6$, in diesem von der Einführung desselben

	bis 1699	$M = 22$,	$N = 2$
von	1700 bis 1799	$M = 23$,	$N = 3$
„	1800 „ 1899	$M = 23$,	$N = 4$
„	1900 „ 1999	$M = 24$,	$N = 5$
„	2000 „ 2099	$M = 24$,	$N = 5$
„	2100 „ 2199	$M = 24$,	$N = 6$
„	2200 „ 2299	$M = 25$,	$N = 0$
„	2300 „ 2399	$M = 26$,	$N = 1$
„	2400 „ 2499	$M = 25$,	$N = 1$.

Obige Regeln haben im Gregorianischen Kalender einzig und allein folgende 2 Ausnahmen:

1) Liefert die Rechnung für den Ostertag den 26sten April, so ist statt dessen der 19te April, der vorhergehende Sonntag, zu nehmen.

2) Liefert die Rechnung $d = 28$, $e = 6$ und ist außerdem der Rest von $11M + 11$ bei der Division durch 30 kleiner als 19, so fällt Ostern nicht, wie die Rechnung ergibt, auf den 25sten April, sondern auf den vorhergehenden Sonntag, den 18ten April.

Für die Zeit von 1900 bis 1999 läßt sich an die Stelle der allgemeinen Methode folgende speziellere setzen: Ist n das laufende Jahr des Jahrhunderts, also für 1953 z. B. die Zahl 53, und

entsteht aus der Division	durch	der Rest
von n	19	a
" "	4	b
" "	7	c
der Zahl $19a + 24$	30	d
" " $2b + 4c + 6d + 5$	7	e

so fällt Ostern auf den $(22 + d + e)$ -ten März resp. den $(d + e - 9)$ -ten April. Dabei ist für das Jahr 1954 der 18te April statt des 25sten und für 1981 der 19te statt des 26sten zu nehmen.

Die Jahre 1954 und 1981 sind in diesem Zeitraum nämlich die einzigen, welche von jenen 2 Ausnahmebestimmungen oben betroffen werden. Soll nämlich der 26ste April sich aus der Rechnung ergeben, so muß $d = 29$, $e = 6$ sein, und die Bedingung $d = 29$ involviert, daß $19a \equiv 5 \pmod{30}$, d. h., da ja $a < 19$, $a = 5$ und n also $= 5, 24, 43, 62, 81$. Von diesen 5 Werten liefert aber nur $n = 81$ den verlangten Wert für e , wie eine mechanische Rechnung zeigt. In entsprechender Weise ergibt sich, daß nur das Jahr 1954 von der zweiten Bedingung betroffen wird.

§ 4. Der Jahrhundertanfang.

The years are denominated as years current (not as years elapsed).

JOHN HERSCHEL. „Outlines of astronomy“.
London 1849. Part. IV (915), p. 628.

Sobald ein Jahrhundert altersschwach wird und sich seinem Ende zuneigt, pflegen sich die Gemüter über die Frage zu erhitzen, wann denn eigentlich diese seine Sterbestunde schlagen wird. So war es vor 200¹⁾, vor 100²⁾ Jahren, und

1) z. B. Ludolph's Widerlegung der von einem Anonymo so intitulierten und in Utopia gedruckten gründlichen Untersuchung vom Anfange des herannahenden Jahrhunderts. Jena 1700. Ausführliche Litteratur über den Anfang des 18ten Jahrhunderts findet man bei Abicht, Annus MDCC ex hypothesi Vulgari Seculi XVII ultimus etc. p. 15, § 24. Leipzig 1700. Auch auf verschiedenen Denkmünzen kam der Streit damals wie auch 1800 zum Ausdruck (s. Köln. Zeitung No. 56. 21. I. 1900 „Der Jahrhundertwechsel in der Numismatik“).

2) Abel Burga, alias Bürja (Prof. d. Mathem. a. d. Cadettenanstalt und franz.-reform. Prediger zu Berlin). „Werther und Werner. Ein Ge-

dasselbe haben wir erst jetzt wieder erlebt. Durch alle politischen Zeitungen, wie unpolitischen Blätter vom „Militär-Wochenblatt“ bis zur „Deutschen Juristenzeitung“ zogen sich endlose Kontroversen, Sprechsaalartikel folgten auf Sprechsaalartikel, ein übereifriger Reporter des „Figaro“ hielt die Frage für subtil genug, um ihr die Ruhe der Gelehrten vom Bureau des longitudes zu opfern u. s. w. u. s. w. Und doch ist nichts einfacher und zugleich müfsiger als diese Frage.

Der Angelpunkt unserer Frage ist: Beginnt die christliche Ära mit dem Jahre 0 oder mit 1? Das erste Jahr unserer Ära „0“ zu nennen, wird gerade jedem Nichtmathematiker, der gewöhnlich die Null überhaupt nicht als vollberechtigte Zahl ansieht, bizarr erscheinen, und selbstverständlich hat auch der Abt Dionysius, von dem unsere christliche Zeitrechnung zuerst eingeführt wurde (530 n. Chr.), das erste Jahr „1“ genannt, ebenso wie die Zeitrechnung der Juden mit dem Jahr „1“ nach Erschaffung der Welt, die der Römer mit dem Jahr „1“ nach Erbauung der Stadt, die der Muhammedaner mit dem Jahr „1“ nach der Hedschra und die der französischen Revolution mit einem Jahre „I“ beginnt; nennen wir doch auch den ersten Tag eines Monats „1“ und nicht „0“!

Damit ist aber unsere Frage entschieden. Denn wenn das erste Jahr „1“ heisst, ist ein volles Jahrhundert erst beim Abschluss des Jahres „100“ verflossen, mithin der erste Januar 101 der erste Tag des zweiten Jahrhunderts. Wenn also Heinrich Heine¹⁾ aus seinem — allerdings jedenfalls unrichtig angegebenen — Geburtstage 1. I. 1800 den Anspruch herleitete, „einer der ersten Männer des Jahrhunderts zu sein“ — so trifft dies im chronologischen Sinne jedenfalls nicht zu.

Die allgemeine Verwirrung über die an sich so einfache

spräch über die Frage, ob das neue Jahrhundert mit dem Jahre 1800 oder mit 1801 anfängt?“ Berlin 1799; s. ferner ein „Gutachten der Hochlöblichen philosophischen Facultät in der Universität Leipzig“. „Beantwortung der Frage: ob das neunzehnde Jahrhundert“ etc. Leipzig 1800.

1) Werke Bd. VI (Leipzig, Gustav Fock) Reisebilder II, Kap. VI, p. 82.

Frage ist bedauerlicherweise vielfach noch durch Hineintragen von hierfür ganz belanglosen Momenten geflissentlich gepflegt. So ist es z. B., da es sich nicht um eine Revision unserer Zeitrechnung, sondern nur um eine Frage auf grund der einmal gegebenen handelt, hierfür völlig gleichgültig, ob die Geburt Jesu s. Z. von Dionysius richtig angesetzt ist oder ob dieselbe, was nicht unwahrscheinlich, in das Jahr 750 statt 754 der Varronischen Ära zu setzen ist. Gar arg aber ist es, wenn selbst dogmatische Feinheiten, wie der Unterschied zwischen Geburt und Inkarnation Christi, herhalten müssen, um den an sich einfachen Sachverhalt künstlich zu verschleiern. Um noch auf eine andere, hierbei häufig angezogene Frage einzugehen, sei bemerkt, daß bei der ursprünglichen Festsetzung das Kalenderjahr mit dem Geburtstage Christi, also dem 25ten Dezember, begann, mithin die Geburt Christi nach jener Zeitrechnung am ersten Tage des Jahres 1 erfolgt ist. Später wurde dann der Jahresanfang um eine Woche zurückgesetzt, und nach dieser unserer jetzigen Zeitrechnung ist der Geburtstag Christi der 25. XII des Jahres 1 vor Chr.

So einfach und selbstverständlich sich unsere Frage nun auch in chronologischer Hinsicht erledigt, so soll andererseits doch nicht geleugnet werden, daß die Wirkung der täglich sich dem Auge aufdrängenden neuen Jahrhundertziffer auf das allgemeine Empfinden eine derartige ist, daß die große Menge mit einem gewissen Recht von dem Auftreten der neuen Ziffer ab das Jahrhundert datiert. Bestärkt wird sie darin durch allerlei geschäftliche Momente — wir erinnern nur an die sich notwendig werdende Änderung der Jahrhundertziffer in vorgedruckten Formularen, auf Stempeln etc. — und durch derlei praktische Gründe mag sich der Bundesrat bewogen gefühlt haben, als er den Geburtstag des neuen Jahrhunderts auf den 1. I. 1900 festsetzte¹⁾, und, wenn auch rechtlich die Frage des Jahrhundertanfangs von prinzipieller Bedeutung kaum sein wird,

1) In der Plenarsitzung vom 14. XII. 1899 (s. den Reichsanzeiger v. 16. XII. 1899, Nichtamtliches).

so werden doch auch wieder äußere Gründe wie die obigen die die gesetzgebenden Faktoren dazu bestimmt haben, das deutsche bürgerliche Gesetzbuch mit dem 1. I. 1900 in Kraft treten zu lassen. Dem gegenüber bezeichnet der Papst Leo XIII. in seinem „*Decretum urbis et orbis*“ über das „heilige Jahr“ 1901 als das erste Jahr des Jahrhunderts. Dafs übrigens auch für die Chronologie selbst das Jahr 1900 den Beginn eines neuen Zeitabschnitts gewissermaßen bedeutet, haben wir im vorigen § bei Berechnung des Osterdatums gesehen, insofern als mit dem Auftreten der neuen Zifferngruppe sich im allgemeinen die Konstanten M , N ändern — immerhin aber auch nur auf grund einer bezüglich des Jahres willkürlichen Festsetzung (s. § 1). Bei der Beschäftigung Gauß' mit der Berechnung des Osterdatums erscheint es nicht unwahrscheinlich, dafs der eben angeführte Umstand den großen Mathematiker zu dem folgenden, von gegnerischer Seite ausgebeuteten Ausspruche in einem Brief vom Jahre 1799 veranlaßt hat: „der letzte Dezember, der wenigstens der letzte Tag sein wird, wo wir siebzehnhundert nennen (wenn gleich mikrologischere Ausleger das Ende des Jahrhunderts noch ein Jahr weiter hinaussetzen), wird mir besonders heilig sein“ ...¹⁾ Diese Worte enthalten implicite gewissermaßen einen Vermittlungsvorschlag, den der bekannte Direktor der Berliner Sternwarte und Herausgeber des preussischen Normalkalenders W. Förster kürzlich gemacht hat²⁾, nämlich nicht von einem „19ten Jahrhundert“, sondern einem „Jahrhundert 19“ zu sprechen und darunter den Zeitraum aller der Jahre zu verstehen, in denen die Zifferngruppe 19 vorkommt.

Mag man also immerhin aus praktischen Gründen von dem Auftreten der neuen Zifferngruppe ab das Jahrhundert

1) Briefw. zw. Gauß und Bolyai, herausgeg. von Stäckel u. Schmidt, 1899, p. 37 (Brief vom 16. XII. 1799).

2) Preussischer Normalkalender für 1901; vgl. a. Förster, „Wann beginnt das neue Jahrhundert?“ Zeitschr. für Ethische Kultur, 1900, abgedr. in Hoffmann's Zeitschr. für mathem. u. naturwiss. Unterr. 1900, XXXI, p. 180—182.

rechnen, nur soll man diesen Grund dann auch offen eingestehen. An sich ist ja die Sache völlig irrelevant, da die chronologische Jahrhundertwende ein rein äußerlicher Abschluss ist und im allgemeinen weder in kultureller noch politischer Hinsicht eine Scheidewand bedeutet. Zu einer besonderen Feier scheint uns daher auch keinerlei Veranlassung vorzuliegen, ganz besonders nicht bei chronologisch unrichtiger Annahme. Dabei mag als Kuriosum erwähnt werden, daß das Städtchen Staffelstein in Franken sich von den allgemeinen Feiern am 1. I. 1900 fern gehalten hat, wie die Zeitungen berichteten, um zu zeigen, daß man in der Geburtsstadt Adam Riese's noch richtig zu rechnen verstehe. Einen richtigen und zugleich dem allgemeinen Empfinden gerecht werdenden Ausweg haben bei der Jahrhundertwende 1800/01 die Weimarer Dichturfürsten gewählt, welche sich zunächst am 1. I. 1800 zum „neuen Saeculum“ beglückwünschten und dann für den ersten Januar des nächsten Jahres noch eine besondere Feier zum Anbruch des neuen Jahrhunderts vorbereiteten.¹⁾

1) Goedeke, Grundriß der Geschichte der Deutschen Dichtung. Bd. V. Abt. II, 75.

Kapitel XXIII.

Geometrische Konstruktionen durch Falten von Papier.

*„Old boys“ like myself may find the book
useful to revive their old lessons.*

SUNDARA ROW.

Vorrede zu „Geometrical exercises“.

Wenn es von einer geometrischen Konstruktion kurz heißt, daß sie „lösbar“, von einer anderen, daß sie „unlösbar“ sei, so ist dabei stets stillschweigend der Zusatz zu machen: „mit alleiniger Benutzung von Zirkel und Lineal“. Manche in diesem Sinne unlösbare Aufgabe, wie z. B. die Dreiteilung eines beliebigen Winkels, wird lösbar, sobald andere Hilfsmittel gestattet werden. Andererseits ist von diesen beiden Hilfsmitteln noch das eine, das Lineal, bekanntlich entbehrlich, ohne daß dadurch die Lösbarkeit einer in dem obigen Sinne lösbaren Aufgabe irgendwie beeinträchtigt würde.¹⁾

In diesem Kapitel beabsichtigen wir, einige Proben aus einem von dem indischen Mathematiker Sundara Row 1893 herausgegebenen Buche²⁾ zu geben, in dem gezeigt wird, wie man zu verfahren hat, wenn man die geometrischen Konstruktionen lediglich durch Falten von Papier ausführen will, wobei

1) Dieser Nachweis wurde erbracht von L. Mascheroni in „La geometria del compasso“, Pavia 1797, ins Französ. übersetzt von Carette 1798, hieraus ins Deutsche von J. Ph. Gruson 1825; außerdem existiert eine freie, jedoch nicht fehlerlose deutsche Bearbeitung von Ed. Hutt, „Die Mascheroni'schen Konstruktionen“, Halle 1880.

2) „Geometrical exercises in paper folding“, Madras 1893. Addison & Co.

als Hilfsmittel zulässig sind ein Messer zum Zerschneiden des Papiers längs einer Falte und Papierstreifen zum Abmessen unter sich gleich langer Linien.

I. Aus einem beliebig geformten Stück Papier ein Rechteck herauszuschneiden.

Man falte das Papier längs AB (s. Fig. 1), trenne mit dem Messer den Randstreifen ab und falte dann das Papier längs CD so, daß die Kante AB mit sich selbst teilweise zur Deckung kommt; dadurch entsteht bei C ein rechter Winkel. Jetzt trennt man mit dem Messer längs CD den Randstreifen ab und fährt dann in derselben Weise fort.

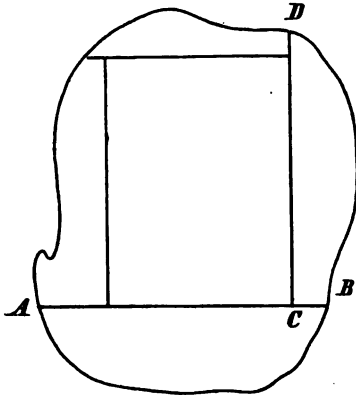


Fig. 1.

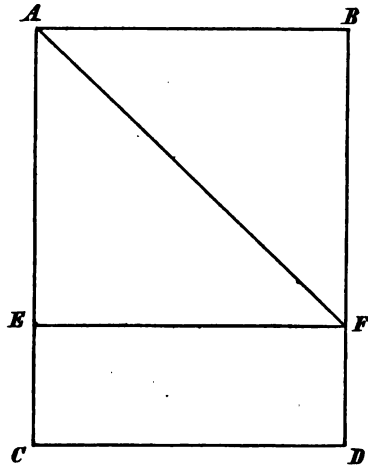


Fig. 2.

Soll das Rechteck vorgeschriebene Dimensionen haben, so bedient man sich zum Abmessen derselben eines Papierstreifens, dem man durch Falten und Abtrennen mit dem Messer eine geradlinige Kante gegeben hat. Dasselbe geschieht, wenn ein Quadrat ausgeschnitten werden soll. — Soll aus einem schon rechteckig zugeschnittenen Blatt ein Quadrat ausgeschnitten werden, so kann dies auch geschehen, indem man das Papier um AF (s. Fig. 2) so faltet, daß die kleinere Rechtecksseite

AB auf die grössere AC fällt. Man faltet dann in EF und trennt den überstehenden Teil ab. Nachdem wir so die Konstruktion eines Quadrats bereits kennen gelernt, setzen wir der Einfachheit halber das Papier in Zukunft stets quadratisch voraus.

Bei der Konstruktion des Rechtecks lösten wir die Aufgabe: „in einem Punkt einer Linie ein Lot auf dieser zu errichten.“ Die Lösung war so einfach und selbstverständlich, daß ein besonderer Hinweis dort überflüssig war. Dasselbe gilt von anderen sogenannten „Fundamentalkonstruktionen“; so halbiert man eine Linie, indem man sie so mit sich zur Deckung bringt, daß die beiden Endpunkte koindizieren; so halbiert man einen gegebenen Winkel, indem man die beiden Schenkel zur Deckung bringt etc.

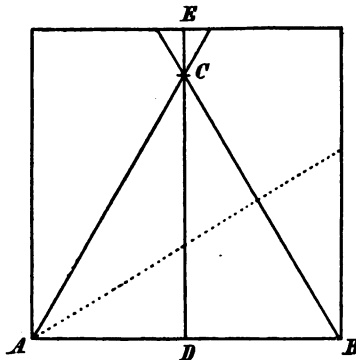


Fig. 3.

II. Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks.

Man falte das jetzt quadratisch vorausgesetzte Papierblatt längs der vertikalen Mittellinie DE (s. Fig. 3) durch Selbstdeckung von AB , wende AB um A so, daß B auf DE fällt in C (hierdurch entsteht eine Falte, um welche das Papier umgelegt wird; solche Umlegefalten, welche selbständige Bedeutung für die Konstruktion nicht haben, sind von jetzt ab in den Figuren punktiert, während gestrichelte Linien Hilfs-

linien für die Darstellung sind), markiere den Punkt C durch eine Falte und falte dann das Papier längs AC und BC — und das gleichseitige Dreieck ist fertig. — Will man nur ein gleichschenkliges Dreieck, so darf der Punkt C auf DE natürlich beliebig gewählt werden.

III. Über einer gegebenen Linie AB als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck von vorgeschriebener Höhe zu konstruieren.

Man falte (s. Fig. 4) in dem vorgeschriebenen Höhenabstand, der mittelst eines Papierstreifens $= BF$ abgemessen wird, das Papier — durch Koinzidenz der Quadratseiten mit sich selbst — parallel zu AB , halbiere AB in D und wende DB um D so, daß B auf EF fällt in C , dann ist ABC das verlangte Dreieck, weil $AD = BD = CD$ ist.

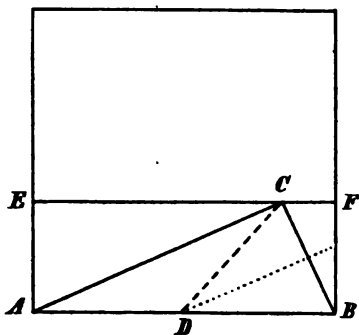


Fig. 4.

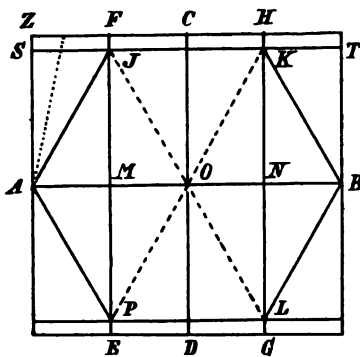


Fig. 5.

IV. Konstruktion des regulären 6-Ecks.

Man falte das Blatt in den beiden Mittellinien AOB und COD (s. Fig. 5) und errichte über AO und OB nach oben und unten gleichseitige Dreiecke; deren 4 Spitzen bilden alsdann mit A und B zusammen die Ecken des regulären 6-Ecks. Die Konstruktion dieser 4 Dreiecksspitzen geschieht entweder streng nach II, einfacher aber wohl folgendermaßen: Nachdem AOB und COD gefaltet sind, halbiere man jede der beiden Hälften nochmals durch vertikale Mittellinien, EMF und GNH ,

lege AZ um A auf MF , so daß Z auf J fällt, und falte nun das Blatt in einer Parallelen ST zu FH durch J und durch Umklappen um AB auf der anderen Seite ebenso. Hierdurch erhält man zu A, B, J die 3 weiteren Ecken des regulären 6-Ecks K, L und P . — Aus dem 6-Eck ergibt sich dann leicht ein reguläres 12-Eck, von dem man 2 der neu hinzutretenden Ecken bereits in den Punkten C und D besitzt.

V. *Konstruktion des regulären 8-Ecks.*

Man falte die Mittellinien AB und CD (s. Fig. 6) und lege jedes der so entstehenden 4 Quadrate um eine seiner Diagonalen, so daß das Quadrat $ADBC$ entsteht. Die Seiten desselben bilden mit denen des großen Winkel von je 45° ; diese 8 Winkel halbiert man und erhält so offenbar das reguläre 8-Eck $AEDFBGCH$.

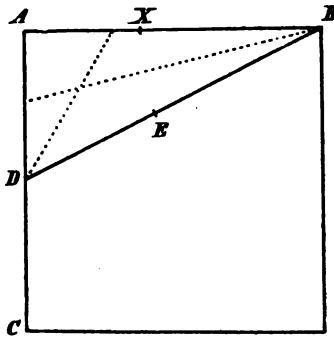


Fig. 6.

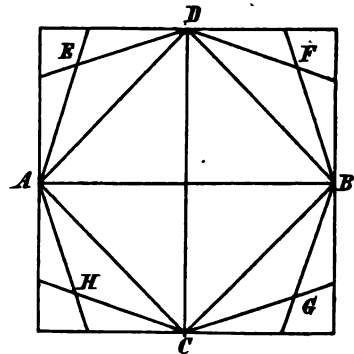


Fig. 7.

VI. *Eine gegebene Linie AB nach goldenem Schnitt zu teilen.*

Ist $AB = a$ (s. Fig. 7) die nach goldenem Schnitt zu teilende Linie, so muß ihr größerer Abschnitt x der Bedingung $a : x = x : (a - x)$ genügen, woraus folgt $x = \frac{a}{2} (\sqrt{5} - 1)$. Die Konstruktion dieses Ausdrucks ergibt sich nun leicht, wie folgt: Man halbiere AC in D , falte BD ($= \frac{a}{2} \sqrt{5}$), lege AD ($= \frac{a}{2}$) um D auf DB , so daß A auf E fällt, und

lege $BE \left(= \frac{a}{2} (\sqrt{5} - 1) \right)$ um B auf AB , so das E auf X fällt; dann ist AB in X stetig geteilt.

Hiernach ergeben sich leicht die Konstruktionen des regulären 5- und 10-Ecks, sowie des 15-Ecks. Auf diese, wie auch auf die gleichfalls von Sundara Row angegebene Konstruktion des regulären 17-Ecks glauben wir hier verzichten zu sollen, dagegen wollen wir wenigstens noch an einem Beispiel zeigen, wie man mit diesen Hilfsmitteln, wenn auch natürlich nicht kontinuierliche Kurven (außer der geraden Linie), so doch beliebig viele diskrete Kurvenpunkte konstruieren kann. Für den Kreis wäre diese Konstruktion trivial, insofern seine Punkte durch Abmessen derselben Entfernung vom Mittelpunkt mittelst Papierstreifen erhalten werden müßten; wir betrachten daher als Beispiel:

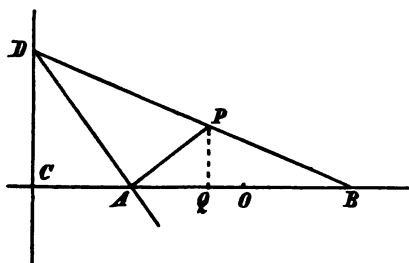


Fig. 8.

VII. Konstruktion von Ellipsenpunkten.

Man markiere auf einer Geraden 2 Punkte A und B , errichte in dem Punkte C (s. Fig. 8) ein Lot auf der Geraden, nehme auf diesem Lot einen beliebigen Punkt D an, falte DA und DB und errichte auf DA in A ein Lot; der Schnittpunkt dieses Lotes mit DB sei P . Nimmt man nun andere und andere Punkte D auf dem Lot an, so liegen die zugehörigen Punkte P alle auf einer Ellipse.

Betrachtet man nämlich die Linie AB als x -Achse eines Cartesischen Koordinatensystems und die Mitte O von AB als Koordinaten-Anfangspunkt, so genügen die Koordinaten $y = PQ$ und $x = QO$ des

Punktes P , wenn wir $AO = OB = a$, also $AQ = a - x$ und $BQ = a + x$ setzen, offenbar den Relationen:

$$y : (a + x) = DC : BC$$

und $y : (a - x) = AC : DC$, also

$$\frac{y^2}{a^2 - x^2} = \frac{AC}{BC}.$$

Wenn man also die jedenfalls positive Größe $\frac{AC}{BC} = \frac{b^2}{a^2}$ setzt, so folgt: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (Ellipsengleichung).



Zusätze und Berichtigungen.

I.

Zu S. 25, Anm. 3.

Über das Zahlensystem Karls XII. mit der Basis 64 findet man nähere Litteraturangaben in einer Notiz des Herrn Eneström, Internéd. des mathém. VII, 1900, p. 227/228.

II.

Zu Kapitel XI.

Von dem im Text mehrfach erwähnten und als mir unzugänglich bezeichneten „*Traité*“ von Jaenisch habe ich durch einen glücklichen Zufall und die Liebenswürdigkeit des Herrn Dr. E. Landau-Berlin noch Bd. I, II einsehen können. Da die Drucklegung schon weit vorgeschritten war, mußte von einer weiteren Berücksichtigung zwar abgesehen werden; wir beschränken uns daher auf die Bemerkung, daß die von uns über jenes Werk aus anderen Quellen geschöpften Angaben, soweit Bd. I, II in Betracht kommen, sich bei der Nachprüfung als richtig bestätigten. Es kommt in Betracht für unsere

S. 171, Anm. 4: Jaenisch II, p. 280 (für ein 25-feldriges Brett),

S. 173, Anm. 1: Jaenisch II, p. 280,

S. 175, Anm. 1: Jaenisch II, p. 284,

S. 197, Fig. 22: Jaenisch II, Pl. XVI, Fig. 31.

Zu der vorletzten Stelle mag noch, im Anschluß an unsere Bemerkung (S. 175, Anm. 1), daß die Warnsdorf'sche Methode für ein Brett von 3×4 Feldern alle überhaupt möglichen Rösselsprünge liefert, der Zusatz gestattet sein, daß Jaenisch (II, p. 284) diesen Fall für den einzigen dieser Art erklärt.

III.

Zu Kapitel XIII.

Bei dem hohen Wert der historischen Untersuchungen des Herrn S. Günther über magische Quadrate scheint es uns doppelt geboten, die Brauchbarkeit jener durch Hinweise auf darin enthaltene Unrichtigkeiten zu erhöhen (vgl. S. 224, Anm. 1 und 2). Es mögen daher die Ausführungen des Herrn Günther über das Vorkommen der magischen bezw. (in unserer Terminologie) Euler'schen Quadrate bei Euler und in dem Briefwechsel Gauß-Schumacher hier einer Revision unterworfen werden. Da in den oben (Kap. XII) vielfach citierten „*Vermischten Untersuchungen*“ des Herrn Günther diese — von uns ja in Kap. XIII besprochenen — Vorkommnisse nicht berücksichtigt waren, machte Herr Günther dieselben zum Gegenstand einer besonderen Studie¹⁾, in der er — offenbar infolge einer Verwechslung — die Vermutung ausspricht, daß sowohl Euler in seiner Formulierung des Problems der 36 Offiziere, wie Clausen bei der des seinigen „eine Bedingung stillschweigend unterdrückt haben“, nämlich die bezüglich der Diagonalreihen, womit also das Gauß'sche und das Euler'sche Problem identisch wären. Zunächst ist es unerfindlich, warum beide, Euler wie Clausen, die Diagonalreihen stillschweigend

1) Günther, „Die magischen Quadrate bei Gauß.“ Zeitschr. für Math. u. Phys. XXI, 1876. Hist.-litter. Abt. p. 61—64.

übergangen haben sollten, wo sie doch beide für Horizontal- und Vertikalreihen die Forderung ausdrücklich erheben. Was zunächst Euler anlangt, so finden sich unter den von ihm angegebenen schließlichen Lösungen seines Problems, wie auch unter seinen „lateinischen“ Quadraten zahlreiche, welche der Gauß'schen Bedingung keineswegs genügen.¹⁾ Dafs Schumacher und Clausen ferner bei der *ursprünglichen* Fragestellung die Diagonalreihen jedenfalls nicht einschließen wollten, kann doch wohl gar nicht bezweifelt werden. Hätte doch Schumacher sonst den Fall $n = 3$ nicht als „leicht“ (s. Kap. XIII, S. 249), sondern als „unlösbar“ bezeichnen müssen. Vor allem ist aber das Argument, durch welches Herr Günther sich zu seiner Vermutung berechtigt glaubt, nämlich, dafs die Aufgabe für $n = 6$ ohne die Gauß'sche Bedingung lösbar sei, hinfällig (s. S. 253, Anm. 1). Die nach der Methode des Herrn Günther hergestellten Quadrate weisen — im Sinne der Schumacher'schen Formulierung (s. S. 249) gesprochen — manche Kombinationen eines Buchstaben und einer Zahl mehrmals auf, was für Bildung magischer Quadrate sehr wohl zulässig, bei Euler'schen Quadraten dagegen unerlaubt ist. In ihnen kommen also — in Euler'schem Sinne gesprochen — mehrere Offiziere vor, welche sowohl demselben Regiment, wie derselben Charge angehören, — und dafs dies nicht in Euler's Absicht lag, geht, wenn der grofse Mathematiker es vielleicht auch nicht ausdrücklich ausspricht, aus dem ganzen Zusammenhang hervor. In dieser letzteren Hinsicht mag nur als ein Beleg von vielen angeführt werden, dafs sonst die von Euler l. c. p. 307 für $n = 3$ gegebene Lösung nicht die einzige, aus einem „carré à simple marche“ sich ergebende wäre.

IV.

Zu Kapitel V.

Bezüglich der Parquetierungen ist nachzutragen, dafs die Muster durch die aufgestellte Bedingung natürlich zunächst nur für *einen* Punkt bezw. für die Eckpunkte *eines* Polygons definiert sind und dafs die Möglichkeit der homogenen Fortsetzung des Musters nach allen Seiten hin zunächst in jedem Falle zweifelhaft ist. Sie ist sogar unmöglich in den Fällen I, II, III, IV, VI, IX, XI (s. S. 69). Für den Fall I — um nur ein Beispiel herauszugreifen — ist das Muster zwar möglich für alle Ecken eines 42-Ecks, indem sich an die Seiten desselben abwechselnd 3- und 7-Ecke anlegen, jedoch erkennt man die Unmöglichkeit einer allseitigen Fortsetzung leicht, wenn man bedenkt, dafs sich an die Seiten eines 3-Ecks abwechselnd 7- und 42-Ecke anlegen müfsten, was bei der ungeraden Seitenzahl natürlich nicht möglich ist. Für die Fälle II, III, IV, VI, IX ergibt sich dies ganz entsprechend, und auch für Fall XI ist es leicht einzusehen.

S. 182, Anm. 1 verbessere das Frolov betreffende Citat nach S. 217, Anm. 1.

S. 196, Anm. 3 lies IV, 1849 statt II, 1847.

1) s. z. B. das Comment. arithm. coll. II, p. 305 für $n = 7$ angegebene Quadrat. — Für eine Arbeit Cayley's, „On latin squares“ (Messenger of Mathem. XIX, 1890, p. 135—137 = Collect. Papers XIII, p. 55—57) gilt dasselbe; dort werden z. B. lateinische Quadrate für die — andernfalls unmöglichen — Fälle $n = 2, 3$ angeführt.

Litterarischer Index.

Die Namen der Publikationsorgane sind in der in der Litteratur üblichen und leicht verständlichen Weise abgekürzt; die häufig vorkommenden „Comptes rendus de l'association française pour l'avancement des sciences“ sind in „Assoc. franç.“ verkürzt. Über die Grundsätze, welche bei Aufstellung des Index maßgebend waren, siehe das Vorwort, S. VI.

16. Jahrhundert.

1. „S'ensuit jeux, partis des Eschez, composez nouvellement pour récréer tous nobles cueurs et pour éviter oysiveté à ceulx qui ont voulonté, désir et affection de le sçavoir et apprendre, et est appellé ce Livre, le jeu des Princes et Damoiselles.“ Paris gegen 1530. S. 168.
2. Nettesheim, Agrippa von. „De occulta philosophia libri tres.“ Köln 1533.
3. De Bouvelles. „Livre singulier et utile, touchant l'art et pratique de Géométrie.“ Paris 1542.
4. Stifel, Michael. „Arithmetica integra.“ Nürnberg 1544. S. 66, 239, 248, 247.
5. Cardan. „De subtilitate libri XXI.“ Nürnberg 1550. S. 32.
6. Riese, Adam. „Rechenung nach der lenge, auff der Linichen und Feder.“ Leipzig 1550. S. 213.
7. Tartaglia. „Quesiti et inventioni diverse.“ Venedig 1554.
8. Tartaglia. „Trattato de numeri e mesure.“ Venedig 1556.
9. „Rythomachiae sive Arithmomachiae ludi mathematici ingeniosissimi descriptiones duae.“ Erfurt 1577.
10. Fulco, Th. „Ludus geometricus.“ London 1578.
11. Gianutio della Mantia. „Libro nel quale si tratta della maniera di giuocar a scacchi, con alcuni sottilissimi partiti.“ Turin 1597. S. 168.
12. Monanteuil. „Ludus astromathematicus.“ Paris 1597.

17. Jahrhundert.

13. Petzoldt. „Künstl. arithm. Quaestiones.“ Nürnberg 1609.
14. Faulhaber. „Newer Mathem. Kunstspiegel.“ Ulm 1609. Hieran schließt sich eine ganze Litteratur an: Schriften desselben, Ulm 1613, 1614 etc.; sowie von Holtzhalb, Ulm 1617; Swedler, Ulm 1618 etc. etc.

15. Bachet de Méziriac. „Problemes plaisans et délectables qui se font par les nombres.“ Paris 1612. 2. Ausg. 1624. 3. und 4. Ausg., herausgegeben von Labosne 1874 und 1879. S. III, 3, 40, 49, 53, 55, 60, 72, 73, 74, 221, 249, 286, 287, 288.
16. Petrus Bungus. „Numerorum Mysteria.“ Paris 1618.
17. Remmel. „Eröffnung großer Geheimnissen.“ Kempten 1619.
18. Weigel. „Tetractys.“ Jena 1622.
19. Etten, H. van. „Récréation mathématique.“ Paris 1626.
20. Leurechon. „Récréation mathématique“ etc. Pont-à-Mousson 1626.
21. Schwenter. „Deliciae physico-mathematicae.“ Nürnberg 1626. Erweiterte Ausg. in 3 Bd. durch Harsdörffer. Nürnberg 1651—1653.
22. Remmel. „Adyta numeri reclusa.“ Kempten 1629.
23. Mersenne. „Questions inouyes, ou récréation des sçavants.“ Paris 1633.
24. Winant van Westen. „Récréations mathématiques contenant plusieurs problèmes“ etc. Nimwegen 1636.
25. Ens, Caspar. „Thaumaturgus mathematicus“ etc. Köln 1636 u. 1651.
26. Bettinus. „Apiaria universae philosophiae mathematicae.“ Bologna 1645, 1656, 1658.
27. Leake. „Mathematical Recreations.“ London 1653.
28. Mydorge. „Récréations mathématiques.“ Paris 1659.
29. Furtenbach. „Mannhafter Kunstspiegel“ etc. Frankfurt a. M. 1660, 1663.
30. Schott. „Cursus mathematicus.“ Herbipoli (Würzburg) 1661.
31. Schott. „Technica curiosa, seu mirabilia artis.“ Nürnberg 1664.
32. Kircher. „Arithmologia sive de abditis Numerorum mysteriis.“ Rom 1665.
33. „Mathematical recreations“ lately compiled by H. van Etten, invented and written by W. Oughtred. London 1667.
34. Blierstrop. „Arithmetische etc. Erquickstunden.“ Glückstadt 1670.
35. Leyburn. „Arithmetical Recreations.“ London 1676.
36. Knorr von Rosenroth. „Kabbala denudata.“ Sulzbach 1677. ,
37. E. W. „Ludus mathematicus.“ London 1682.
38. Kochanski. Considerationes quaedam circa Quadrata et Cubos magicos etc. Acta Eruditorum 1686. S. 247.
39. Cordt Danxt. „Arithm. etc. Ergötzlichkeiten.“ Kopenhagen 1691.
40. Loubère, S. de la. „Du Royaume de Siam.“ Paris und Amsterdam 1691. In der deutschen Übersetzung Nürnberg 1800 fehlt der Excurs über die magischen Quadrate. S. 218.
41. Frenicle de Bessy. „Des carrés magiques.“ Divers ouvrages de mathém. et de physique. Par Messieurs de l'Académie Royale des Sciences de Paris 1693, p. 423—507. S. 213, 224, 246.
42. Ozanam. „Récréations mathématiques et physiques.“ Paris 1694. Zahlreiche weitere Auflagen, welche man im „Intermédiaire des mathématiciens“ 6, p. 112 angegeben findet. S. 32, 72.

18. Jahrhundert.

43. Leibniz. „Explication de l'Arithmétique binaire“ etc. Histoire de l'Acad. Roy. des Sc. de Paris 1703 = Mathem. Schriften, herausgeg. von Gerhardt. Abt. II, Bd. 3, Halle 1863, p. 223—227. S. 24.
44. Poignard. „Traité des Quarrés sublimes.“ Brüssel 1704.
45. Truchet, Sébastien. „Mémoire sur les combinaisons.“ Mémoires de l'Acad. Roy. des Sc. pour l'année 1704. Paris 1706.
46. De Lahire. „Nouvelles constructions et considérations sur les quarrés magiques.“ Mémoires de l'Acad. Roy. des Sc. pour l'année 1705. Paris 1706.
47. Dancicourt. „De periodis columnarum in serie numerorum progressionis arithmeticae dyadice expressorum.“ Miscellanea Berolinensia 1710.
48. Leibniz. „Annotatio de quibusdam ludis“ etc. Miscellanea Berolinensia 1710, p. 22—26. S. 1.
49. Sauveur. „Construction générale des quarrés magiques.“ Mémoires de l'Acad. Roy. des Sc. de Paris pour l'année 1710. S. 246.
- 49*. Strabbe. „Allgemeene Manier om Tovervierkanten te maaßen,“ door den Heer Sauveur, uit het Fransch vertaald. Wiskundige Verlostiging door het genootschap der mathematische weetenschappen. 1, Amsterdam 1793. Mengelwerk, p. 1—8; 22—32; 230 ff.
50. Pelican. „Arithmetica dualis“ etc. Prag 1712.
51. Leirtic. „Ludus mathematicus, sive crux geometrica.“ Jena 1716.
52. Pescheck. „Alte und neue arithmetische und geometrische Erquickstunden und Ergötzlichkeiten.“ Budissin (Bautzen) 1716, 1726.
53. Halken, Paul. „Mathematisches Sinnen-Confect“ etc. Hamburg 1719.
54. Leibniz. Lettre sur „la philosophie chinoise,“ section IV. Epistolae ad diversos, herausgeg. von Kortholt 1734, 2, p. 488 ff. S. 24.
55. Leibniz. „Mathem. Beweis der Erschaffung und Ordnung der Welt“ etc., herausgeg. v. R. A. Noltenius. Leipzig 1734. S. 24.
56. Maier. „De arithmetica figurata eiusque usibus aliquot.“ Commentarii Acad. Petropolit. 3, 1735.
57. Vellnagel. „Numerandi methodi“ etc. Jena 1740.
58. Euler. „Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis.“ Commentarii Acad. Petropolit. 8, 1741, p. 128—140. S. 316, 318.
59. Rohlf. „Künstliches Zahlenspiel oder gründliche Anweisung, wie die sogenannten magischen Quadrate zu verfertigen.“ Buxtehude 1742.
60. Rost. „Mathematischer Lost und Nutzgarten.“ Nürnberg 1746.
61. Berckenkamp. „Leges numerandi“ etc. Lemgo 1747.
62. Rassing. „Arithmetischer und algebraischer Zeitvertreib.“ Hamburg 1747.
63. „Les Amusements mathématiques.“ Paris und Lille 1749.
64. D'ons en Bray. „Méthode facile pour faire tels quarrés magiques que l'on voudra.“ Mémoires de l'Acad. Roy. des Sc. de Paris pour l'année 1750.

65. Montucla. *Récréations mathématiques*. Berlin 1750.
- 65^a. Chaula (angeblich Pseudonym für Montucla). „*Récréations mathématiques*.“ Paris 1778.
66. Euler. „*Solution d'une Question curieuse qui ne paroît soumise à aucune analyse*.“ *Histoire de l'Acad. Roy. des Sc. de Berlin* 15, 1759, p. 310—337 = *Commentationes arithm. coll.*, herausg. v. Fufs, Petersburg 1849, 1, p. 337—355. S. 165, 168, 169, 172, 173, 174, 175, 177, 185, 193.
- 66^a. „*An account of Euler's Method of solving a Problem, relative to the Move of the Knight*“ etc. From a Correspondent. *Journal of science and the arts* 3, 1817, p. 72—77. S. 170.
67. Bonaventure. „*Amusements philosophiques*“ etc. Amsterdam 1763.
68. Rallier des Ourmes. „*Mémoire sur les quarrés magiques*.“ *Mémoires de l'Acad. Roy. des Sc. de Paris pour l'année 1763*.
69. Lelio della Volpe. „*Corsa del cavallo per tutt'i scacchi dello scacchiere*.“ Bologna 1766.
70. Capito, Cornelius. „*Alle magischen Quadrattafeln zu verfertigen*“ etc. Glückstadt 1767.
71. Franklin, Benjamin. „*Experiments and observations on electricity . . . , to which are added Letters and Papers on philosophical subjects*.“ London 1769. S. 209, 246.
72. Guyot. „*Récréations physiques et mathématiques*.“ Paris 1769. 1, 2, 3, 4. — 2. éd. 1772—1775; 3. éd. 1786. — Deutsche Übers. Augsburg 1772. S. 52, 78.
73. Euler. „*Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile*.“ *Commentarii Acad. Petropolit.* 15, 1770, p. 75—106 = *Comment. arithm. coll.* 1849, 1, p. 427—443. S. 247.
74. Vandermonde. „*Remarques sur les problèmes de situation*.“ *Histoire de l'Acad. des Sc. de Paris pour l'année 1771*, p. 566—574. S. 167, 186, 187.
75. Monge. „*Réflexions sur un tour de cartes*.“ *Mémoires de mathém. et de physique présentés à l'Acad. des Sc. de Paris* 1773, p. 390—412. S. 74, 76.
76. Collini. „*Solution du problème du cavalier au jeu d'échecs*.“ Mannheim 1773. S. 179.
77. Brander. „*Arithmetica binaria*“ etc. Augsburg 1775.
78. Hutton. „*Miscellanea mathematica*.“ London 1775.
79. Luya. „*Amusemens arithmétiques*“ etc. Genf 1779.
80. Ballière de Laisement. „*Essai sur les problèmes de situation*.“ Rouen 1782.
81. Euler. „*Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques*.“ *Verhandelingen van het Genootschap te Vlissingen* 9, 1782, p. 85—239 = *Comment. arithm. coll.* 2, p. 302—361. S. 248, 253, 255, 402.
82. Euler. „*De quadratis magicis*.“ *Opera posthuma*, herausgeg. von Fufs, Petersburg 1862, 1, p. 140—151 = *Comment. arithm. coll.* 2, p. 593—602.
83. Grüson, J. Ph. „*Enthüllte Zaubereien und Geheimnisse der Arithmetik*.“ Berlin 1796.

19. Jahrhundert.

1801—1810.

84. Giacometti. „Il nuovo giuoco di Scacchi, ossia il giuoco della guerra.“ Genua 1801.
85. Aretin, J. Chr. Freiherr von. „Darstellung der Vortheile und verborgenen Eigenschaften der Enneadik oder des Novennal = Zählungssystems.“ Tübingen 1805. Die ganze Auflage dieser Schrift wurde — mit Recht — zurückgezogen, nur ein Exemplar befindet sich, mit einer diesbezüglichen Bemerkung des Autors versehen, in der Kgl. Bibl. zu Berlin.
86. Dollinger. „24 verschiedene Arten, den Springer“ etc. Wien 1806.

1811—1820.

87. Gergonne. „Recherches sur un tour de cartes.“ Annales de Gergonne 4, 1813/14, p. 276—283. S. 50, 51, 78.
88. Mollweide. „De quadratis magicis commentatio.“ Leipzig 1816. Eine akademische Gelegenheitschrift, s. a. v. demselben den Artikel „Quadrat, magisches“ in Klügel's Wörterbuch 4, 1823. S. 210.

1821—1830.

89. Willis. „Attempt to analyse the Automaton Chess-Player.“ London 1821.
90. Warnsdorf, H. C. von. „Des Rösselsprungs einfachste und allgemeinste Lösung.“ Schmalkalden 1823. S. 170.
91. Jackson. „Rational Amusements for winter evenings.“ London 1824.
92. Pratt. „Studies of Chess.“ London 1825.
93. Schinnern, von. „Ein Dutzend mathematischer Betrachtungen.“ Wien 1826.
94. Stein. „Über die Vergleichung der verschiedenen Numerationsysteme.“ Crelle's Journal 1, 1826, p. 369—371. S. 25.
95. Matzka. „Analytische Auflösung dreier Aufgaben der Calendariographie.“ Crelle's Journal 3, 1828, p. 337—346. S. 386.

1831—1840.

96. Clausen. „Über eine arithmetische Aufgabe.“ Crelle's Journal 7, 1831, p. 30—31. S. 43.
97. Muser. „Récréations arithmétiques.“ Münster 1831.
98. Jahn, G. A. „Auflösung einiger Aufgaben aus der Calendariographie.“ Crelle's Journal 9, 1832, p. 139—145. S. 386/387.
99. Ciccolini, T. „Del cavallo degli Scacchi.“ Paris 1836. S. 188.
100. Hohndell. „Praktische Anleitung zur Bildung und Berechnung magischer oder sogenannter Zauberquadrate.“ Leipzig 1837.
101. Jaclot et D'Arbel aîné. „Récréations arithmétiques.“ Paris 1838. 1, 2.
102. Violle. „Traité complet des carrés magiques.“ Paris et Dijon 1838. 1, 2.

103. Zuckermandel. „Regeln, nach denen alle Zauberquadrate . . . gebildet werden können.“ Nürnberg 1838.
104. Lavernède, Thomas de. „Problème de situation.“ Mémoires de l'Acad. du Gard. Nismes 1838/39, p. 151—179. S. 188.
105. Martius, Joh. Nik. „Gesammelte Schriften über natürliche Magie.“ Ausgew. u. bearb. von J. H. M. von Poppe. Stuttgart 1839. S. 33.
106. Roget. „Description of a Method of moving the Knight“ etc. Philos. Magaz. 16, 1840, p. 305—309. S. 188, 189.
107. Walker. „Chess without a Chess-board.“ Fraser's Magaz. for town and country. 1840.
108. Walker. „On the moving the Knight“ etc. Philos. Magaz. 16, 1840, p. 498—501.

1841—1850.

109. Piper. „Zur Kirchenrechnung.“ Crelle's Journal 22, 1841, p. 97—147. S. 387.
110. Moon, R. „On the knight's move at chess.“ Cambr. Math. J. 3, 1843, p. 233—236. S. 181.
111. Moon, R. „On magic squares.“ Cambr. Math. J. 4, 1845, p. 209—214.
112. Tomlinson. „Amusements in Chess.“ London 1845.
113. Lasa, von der. „Lösung des Rösselsprungs.“ Deutsche Schachzeitung 1, 1846, p. 188—191; 2, 1847, p. 79—86; 97—103. S. 171, 179.
114. Moon, R. „On the theory of magic squares, cubes“ etc. Cambr. and Dubl. Math. J. 1, 1846, p. 160—164. S. 246.
115. Franz. „Rösselsprung.“ Deutsche Schachzeitung 2, 1847, p. 341—343. S. 197.
116. Kirkman. „On a problem in combinations.“ Cambr. and Dubl. Math. J. 2, 1847, p. 191—204. S. 274, 276.
117. Lasa, von der. „Notiz über ein altes, bei Janot in Paris gedrucktes Quartbändchen.“ Deutsche Schachzeitung 2, 1847, p. 317—320. S. 168.
118. Listing. „Vorstudien zur Topologie.“ Göttinger Studien 1847, Abt. 1, p. 811—875. S. 302, 320.
119. Raedell. „Über die mathematische Behandlung des Schachspiels.“ Deutsche Schachzeitung 3, 1848, p. 101—120 (unvollendet). S. 81.
120. Charpentier. „Anciens et nouveaux jeux géométriques de patience et d'adresse . . .“ Paris 1849.
121. Hanstein (anonym „Hn.“). „Der Rösselsprung in höchster Kunstvollendung.“ Schachzeitung 4, 1849, p. 94—97.
122. Oppen, von. „William Beverley's Rösselsprung.“ Schachzeitung 4, 1849, p. 21—24. S. 196.
123. Wenzelides. „Bemerkungen über den Rösselsprung nebst 72 Diagrammen.“ Schachzeitung 4, 1849, p. 41—93; 5, 1850, p. 212—221; 230—248. S. 171, 172, 196.
124. Cayley. „On the Triadic Arrangements of Seven and Fifteen Things.“ Philos. Magaz. 37, 1850, p. 50—53 = Collect. Papers 1, p. 481—484. S. 274, 277, 282.

125. Kirkman. „Note on an unanswered prize question.“ *Cambr. and Dubl. Math. J.* 5, 1850, p. 255—262. S. 274, 275, 282, 283, 284.
126. Kirkman. „On the Triads made with Fifteen Things.“ *Philos. Magaz.* 37, 1850, p. 169—171. S. 277, 282, 284.
127. Volpicelli. „Solution d'un problème de situation relatif au cavalier des échecs.“ *C. R. de Paris* 31, 1850, p. 314—318. S. 176.

1851—1860.

128. Wenzelides. „Über symmetrische Rösselsprünge.“ *Schachzeitung* 6, 1851, p. 286—297. S. 196.
129. Anstice. „On a problem in combinations.“ *Cambr. and Dubl. Math. J.* 1852, 7, p. 279—292. S. 281, 284.
130. Cattois. „Calendrier mental grégorien, ou les Curiosités mathématiques, utiles, instructives et amusantes.“ Orléans 1852.
131. Minding. „Über den Umlauf des Springers auf dem Schachbrette (den sogenannten Rösselsprung).“ *Crelle's Journal* 44, 1852, p. 73—82 = *Bull. de la classe physico-mathém. de l'Acad. Impér. des sc. de St.-Petersbourg* 6; in englischer Übersetzung „On the Knight's move at chess“ in *Cambr. and Dubl. Math. J.* 7, 1852, p. 147—156. S. 178, 199.
132. Clausen. „Direkte Auflösung des Rösselsprungs.“ *Grunert's Archiv Math. Phys.* 21, 1853, p. 91—92. S. 188.
133. „Sur le problème du cavalier au jeu des échecs.“ Par un abonné. *Nouv. annal. de mathém.* 13, 1854, p. 181—186.
134. Hamilton. „Memorandum respecting a new System of Roots of Unity.“ *Philos. Magaz.* (4) 12, 1856 Juli-Dec., p. 446. S. 327, 330.
135. Slyvons (Pseudonym für Edm. Solvyns). „Application de l'Analyse aux sauts du cavalier du jeu des échecs. Brüssel 1856.
136. Cayley. „A problem in permutations.“ *Quart. J.* 1, 1857, p. 79 = *Collect. Papers* 3, p. 8.
137. Hamilton. „On the Icosian Calculus.“ *British Assoc. Report* 1857, Notices and abstracts, p. 3. S. 327, 329.
138. Reiss, M. „Beiträge zur Theorie des Solitärspiels.“ *Crelle's Journal* 54, 1857, p. 344—379. S. 98, 100, 102.
- 138*. Ruchonnet. „Théorie du solitaire par feu le docteur Reiss, librement traduit de l'allemand.“ *Nouv. Corr. mathém.* 3, 1877, p. 234—241; 263—268; 289—293. S. 100.
139. Bouniakowsky, V. „Sur un problème de position, relatif à la théorie des nombres.“ *Bull. de la classe physico-mathém. de l'Acad. Impér. des sc. de St.-Petersbourg* 16, 1858, p. 67—78. S. 76.
140. Oppen, von. „Rösselsprung.“ *Schachzeitung* 13, 1858, p. 174—175. S. 196.
141. Sylvester. „On the problem of the virgins.“ *Philos. Magaz.* 16, 1858, p. 371—376. S. 257, 274.

142. Warnsdorf, H. C. von. „Zur Theorie des Rösselsprungs.“ Schachzeitung 13, 1858, p. 489—492. S. 171.
143. Hugel. „Die magischen Quadrate mathematisch behandelt und bewiesen.“ Ansbach 1859.
144. Gauß-Schumacher, Briefwechsel, herausgeg. von C. F. Peters, 1—6, Altona 1860—65. S. 115, 120, 121, 181, 174, 249, 251, 253, 401.

1861—1870.

145. Pierce, B. „Cyclic solutions of the school-girl puzzle.“ The astronomical Journal by B. A. Gould 6, Cambridge U. S. 1861, p. 169—174. S. 277.
146. Poincaré, C. de. „Sur la course du cavalier au jeu des échecs.“ C. R. de Paris 52, 1861, p. 840—842. S. 188.
147. Woolhouse, W. S. B. „On the Rev. T. P. Kirkman's problem respecting certain Triadic Arrangements of Fifteen Symbols.“ Philos. Magaz. 22, 1861, p. 510—515.
148. Jaenisch. „Traité des applications de l'analyse mathématique au jeu des échecs.“ 1, 2, 3. St.-Petersburg 1862. — Besprechungen dieses äußerst seltenen Buches durch v. d. Lasa, Schachzeitung 17, 1862, p. 65—69 und im Bull. de la classe physico-mathém. de l'Acad. Impér. des sc. de St.-Petersbourg 6, 1863, p. 473—477. S. 81, 82, 157, 171, 173, 175, 197, 401.
149. Kirkman. „On the Puzzle of the Fifteen Young Ladies.“ Philos. Magaz. 23, 1862, p. 198—204. S. 281.
150. Listing. „Der Census räumlicher Complexe oder Verallgemeinerung des Eulerschen Satzes von den Polyëdern.“ Göttinger Abhandl. 10, 1861/62. Math. Kl., p. 97—182. Göttingen 1862. Referat Cayley's über diese Arbeit vor der London Math. Soc. in deren Proceedings 2, 12. XI. 1868, p. 103—104. S. 306, 307.
151. Cayley. „On a Tactical Theorem relating to the Triads of Fifteen Things.“ Philos. Magaz. 25, 1863, p. 59—61 = Collect. Papers 5, p. 95—97.
152. Lange, M. „Mathematische Schachfragen.“ Schachzeitung 18, 1863, p. 97—102; 172—176; 203—209; 363—365. S. 81, 157.
153. Lange, M. „Maxima und Minima.“ Schachzeitung 19, 1864, p. 42—47; 78—81; 136—144; 188—191. S. 164.
154. Saint-Laurent, Thomas de. „Mélanges ou battements réguliers de cartes.“ Mémoires de l'Acad. du Gard. Nîmes 1864/65, p. 489—545. S. 77, 78.
155. Braadbaart. „De paardensprong in het schaakspel“ etc. Zaan- dam 1865.
156. Cretaine. „Études sur le problème de la marche du cavalier au jeu des échecs et solution du problème des huit dames.“ Paris 1865.
157. Lange, M. „Lehrbuch des Schachspiels.“ 2. Aufl. Halle 1865. S. 28, 83, 157.

158. Frost, A. H. „Invention of magic cubes and construction of magic squares, possessing additional properties.“ *Quart. J.* 7, 1866, p. 92—102. S. 210, 231, 247.
159. Frost, A. H. „Supplementary note on nasik cubes.“ *Quart. J.* 8, 1867, p. 74. S. 247.
160. Power, J. „On the problem of the fifteen school girls.“ *Quart. J.* 8, 1867, p. 236—251. S. 279.
161. Loyd, S. „The Queens Tour.“ *American Chess-Nuts* von Cook, Henry und Gilberg. New York 1868, p. 396. S. 205.
162. Thompson, W. H. „On magic squares.“ *Quart. J.* 10, 1869, p. 186—202. S. 246.
163. Horner. „On the algebra of magic squares.“ *Quart. J.* 11, 1870, p. 57—65; 123—132; 213—224. S. 231.

1871—1880.

164. Frost, A. H. „General solution and extension of the problem of the 15 school girls.“ *Quart. J.* 11, 1871, p. 26—37. S. 281, 284.
165. Reifs, M. „Évaluation du nombre de combinaisons desquelles les 28 dés d'un jeu de dominos sont susceptibles d'après la règle de ce jeu.“ *Annali di matematica* 5, 1871, p. 63—120. S. 330.
166. Gros, L. (anonym „un clerc de notaire Lyonnais“). „Theorie du baguenedier.“ Lyon 1872. Verlag v. Aimé Vingtrinier. S. 33.
167. Simonot. „Le Polygraphe.“ Paris 1872.
168. Tarry, H. „Solution du problème du cavalier au jeu d'échecs.“ *Les Mondes* 28, 1872, p. 60—64. S. 176.
169. Volpicelli. „Solution complète du problème relatif au cavalier des échecs.“ *C. R. de Paris* 74, 1872, p. 1099—1102. S. 175, 176.
170. Volpicelli. „Soluzione completa e generale mediante la geometria di situazione del problema relativo alle corse del cavallo sopra qualunque scacchiere.“ *Atti della Reale Accademia dei Lincei* 25, Rom 1872, p. 87—160; 364—454; 26, 1873, p. 49—187; 241—325. S. 176.
171. Drach. „An easy general rule for filling up all magic squares.“ *Messenger of mathem.* (2) 2, 1873, p. 169—174; 187. S. 246.
172. Hierholzer, C. „Über die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren.“ *Mathem. Annal.* 6, 1873, p. 30—32. S. 316.
173. Pessl, von. „Über eine besondere Art magischer Quadrate.“ *Progr.* Amberg 1873. S. 246.
174. J. R. „Eine Rösselsprungs-Frage.“ *Deutsche Schachzeitung* 28, 1873, p. 233. S. 199.
175. Régnier. „Problème de la marche du cavalier.“ *Les Mondes* 32, 1873, p. 507—514. S. 176.
- 175^a. Volpicelli. „Réponse aux critiques faites à ma solution du problème du cavalier et des échecs.“ *Les Mondes* 33, 1874, p. 126—130. S. 176.

176. Wiener, Chr. „Über eine Aufgabe aus der Geometria Situs.“ *Mathem. Annal.* 6, 1873, p. 29—30. S. 322.
177. Glaisher. „On the problem of the eight queens.“ *Philos. Magaz.* 48, 1874, p. 457—467. S. 132.
178. Günther, S. „Zur mathematischen Theorie des Schachbretts.“ *Grunert's Archiv Math. Phys.* 56, 1874, p. 281—292. S. 131.
179. Linde, Antonius van der. „Geschichte und Litteratur des Schachspiels.“ Berlin 1874. S. 80, 157, 165, 166, 168.
180. Pauls, E. „Das Maximalproblem der Damen auf dem Schachbrette.“ *Deutsche Schachzeitung* 29, 1874, p. 129—134; 257—267. S. 125, 154, 157.
181. Cantor, M. „Zahlentheoretische Spielerei.“ *Zeitschr. für Math. und Phys.* 20, 1875. Hist.-litt. Abt. p. 134—135.
182. Günther, S. „Beweis eines Fundamentalsatzes von den magischen Quadraten.“ *Grunert's Archiv Math. Phys.* 57, 1875, p. 285—296. S. 224.
183. Sylvester. „On the Fifteen Young Ladies Problem.“ *London Math. Soc. Proc.* 7, 1875/76, p. 235/36.
184. Exner. „Der Rösselsprung als Zauberquadrat.“ *Progr. Gymn. Hirschberg* 1876. S. 197.
185. Flye Sainte-Marie. „Note sur un problème relatif à la marche du cavalier sur l'échiquier.“ *Bull. de la soc. mathém.* 5, 1876/77, p. 144—150. S. 200.
186. Günther, S. „Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften.“ Leipzig 1876. S. 210, 213, 222, 224, 401.
187. Günther, S. „Die magischen Quadrate bei Gauß.“ *Zeitschr. für Math. und Phys.* 21, 1876. Hist.-litt. Abt. p. 61—64. S. 401.
188. Hugel. „Das Problem der magischen Systeme.“ *Neustadt a. d. H.* 1876. S. 246.
189. Lucas, Ed. „Sur un problème d'Euler relatif aux carrés magiques.“ *Nouv. Corr. mathém.* 2, 1876, p. 97.
190. Mansion. „Sur les carrés magiques.“ *Nouv. Corr. mathém.* 2, 1876, p. 161; 193.
191. Barnard. „Magic squares.“ In *Johnson's Cyclopaedia.* 1877.
192. Cayley. „Note on magic squares.“ *Messenger of mathem.* 6, 1877, p. 168 = *Collect. Papers* 10, p. 38.
193. Frost, A. H. „On the knights path.“ *Quart. J.* 14, 1877, p. 123—125. S. 192, 198, 199.
194. Frost, A. H. „A simple method of tracing paths of a knight“ etc. *Quart. J.* 14, 1877, p. 354—359. S. 170.
195. Frost, A. H. „On the general properties of nasik squares.“ *Quart. J.* 15, 1878, p. 34—49. S. 230, 247.
196. Frost, A. H. „On the general properties of nasik cubes“ und („Description of plates 3 to 9“). *Quart. J.* 15, 1878, p. 93—123; 366—368. S. 247.
197. Guthrie, Frederick. „Note on the Colouring of Maps.“ *Roy. Soc. Edinb. Proc.* 10, 1878—80, p. 727—728. S. 340.

198. Busschop, P. „Recherches zur le jeu du solitaire,“ herausgeg. v. J. Busschop. Brügge 1879. S. 96.
199. Cayley. „On the colouring of maps.“ London Math. Soc. Proc. 1878 und Roy. Geogr. Soc. Proc. 1, 1879, p. 259—261 = Collect. Papers 11, p. 7—8. S. 340, 341.
200. Hermary. „Sur le jeu du solitaire.“ Assoc. franç. 8, Congrès de Montpellier 1879, p. 284—294. S. 100, 102, 106.
201. Johnson, W. „Notes on the '15' Puzzle.“ Amer. J. 2, 1879, p. 397—399. S. 352.
- 201^a. Story, W. E. „Notes on the '15' Puzzle.“ Amer. J. 2, 1879, p. 399—404. S. 352.
202. Kempe. „On the Geographical Problem of the Four Colours.“ Amer. J. 2, 1879, p. 193—200. S. 341, 342, 344.
- 202^a. Story, W. E. „Notes on the preceding paper.“ Amer. J. 2, 1879, p. 201—204. S. 341.
203. Wekerle. „Die Philosophie des Schach.“ Leipzig 1879. S. 81/82.
204. Escoffier. „Calendrier perpétuel.“ 1880.
205. Fleury. „La clé du taquin, ou la solution des quinze.“ Marseille 1880.
206. Laquière. „Solutions régulières du problème d'Euler sur la marche du cavalier.“ Bull. de la soc. mathém. 8, 1880, p. 82—102; 132—158. S. 188, 190, 192.
207. Lucas, Ed. „Le problème des huit reines.“ La revue scientifique 1880, p. 948—953. S. 123, 133.
208. Macfarlane, A. „On a Calculus of relationship.“ Roy. Soc. Edinb. Proc. 10, 1880, p. 224—232. S. 78.
209. Mondésir, de. „Le dernier mot du taquin.“ La Nature 8, 1880, 2^{ième} semestre, p. 266/267.
210. Tait. „On the Colouring of Maps.“ Roy. Soc. Edinb. Proc. 10, 1880, p. 501—502. S. 343.
211. Tait. „Note on the Theory of the '15' Puzzle.“ Roy. Soc. Edinb. Proc. 10, 1880, p. 664—665. S. 352.
212. Tait. „Note on a theorem in geometry of position.“ Roy. Soc. Edinb. Trans. 29, 1880, p. 657—660.
213. Tissandier. „Les carrés magiques à propos du Taquin, jeu mathématique.“ La Nature 8, 1880, 2^{ième} semestre, p. 81—82. S. 351.

1881—1890.

214. Badoureaux. „Mémoire sur les figures isocèles.“ Journal de l'école polytechnique, 49^{ième} cahier, 30, 1881, p. 47—172. S. 70/71.
215. Carpmael. „Some solutions of Kirkman's 15 school-girl-problem.“ London Math. Soc. Proc. 12, 1881, p. 148—159. S. 281.
216. Harmuth. „Über magische Quadrate und ähnliche Zahlenfiguren.“ Grunert's Archiv Math. Phys. 66, 1881, p. 286—313. S. 246.
217. Harmuth. „Über magische Rechtecke mit ungeraden Seitenzahlen.“ ibidem p. 413—447. S. 246.
218. Laquière. „Note sur le nombre des marches rentrantes du cavalier“ etc. Bull. de la soc. mathém. 9, 1881, p. 11—17. S. 201, 202.

219. Lemoine. „Quelques questions de Géométrie de position sur les figures qui peuvent se tracer d'un seul trait.“ Assoc. franç. 10, Congrès d'Alger 1881, p. 175—180.
220. Macfarlane, A. „An analysis of relationships.“ Philos. Magaz. 11, 1881, p. 436—446. S. 78.
221. Macfarlane, A. „An Analysis of Relationship.“ Educational Times Reprints 36, 1881, p. 78—81. S. 78.
222. Polignac, C. de. „Note sur la marche du cavalier dans un échiquier.“ Bull. de la soc. mathém. 9, 1881, p. 17—24. S. 188.
223. Tissandier. „Les récréations scientifiques ou l'enseignement par les jeux.“ Paris 1881.
224. Bourget. „Sur un problème de permutations successives nommé Battement de Monge.“ Journal de mathém. de Liouville (3) 8, 1882, p. 413—434. S. 76, 77.
225. Harmuth. „Über magische Parallelepiped.“ Grunert's Archiv Math. Phys. 67, 1882, p. 238—253. S. 246.
226. Hijo, Paul de (Pseudonym eines Abtes). „Le problème du cavalier des échecs, d'après les méthodes qui donnent la symmétrie par rapport au centre.“ Metz 1882. — Enthält über 400 000 Rösselsprünge.
227. Lucas, Ed. „Récréations mathématiques.“ 1, 2, 3, 4. Paris 1882—1894. 2. Aufl. von 1, 2 1891 bezw. 1896. S. III, IV, 6, 8, 13, 14, 15, 16, 23, 31, 33, 53, 86, 89, 109, 112, 113, 124, 125, 130, 133, 152, 154, 167, 233, 284, 285, 305, 323, 330, 336, 344, 351, 357, 362, 365, 368, 369, 372, 373, 380.
228. Macfarlane, A. „Algebra of relationship.“ Roy. Soc. Edinb. Proc. 11, 1882, p. 5—14; 162—173. S. 78.
229. Malmsten. „Generalisering af det s. k. 'Femtonspelet.'“ Göteborg's kongl. Vetenskaps- och Vitterhets Samh. Handlingar 1882, p. 75—105. S. 352.
230. Scheffler. „Die magischen Figuren“ Leipzig 1882. S. 231, 246.
231. Frost, A. H. Artikel „Magic squares“ in Encyclopaedia britannica 15, 1883, p. 213—216.
232. Harmuth. „Über polydimensionale Zahlenfiguren.“ Grunert's Archiv Math. Phys. 69, 1883, p. 90—107. S. 246.
233. Lucas, Ed. „Sur l'arithmétique figurative.“ Assoc. franç. 12, Congrès de Rouen 1883, p. 83—97. S. 140, 151.
234. Macfarlane, A. „Analysis of relationships of consanguinity and affinity.“ Anthropol. Inst. Journ. 12, 1883, p. 46—63. S. 78.
235. Macfarlane, A. „Arithmetical notation of kinship.“ Nature 28, 1883, p. 588. S. 78.
236. Mantel. „Sur les combinaisons d'éléments dispersés dans un plan.“ Assoc. franç. 12, Congrès de Rouen 1883, p. 171—175. S. 154.
237. Parmentier. „Le problème des n reines.“ Assoc. franç. 12, Congrès de Rouen 1883, p. 197—213. S. 124.
238. Perott. „Sur le problème des fous.“ Bull. de la soc. mathém. 11, 1883, p. 173—186. S. 143, 148.
239. Zeller, Chr. „Problema duplex Calendarii fundamentale.“ Bull. de

- la soc. mathém. 11, 1883, p. 59—61; „Kalender-Formeln.“ Acta mathem. 9, 1887, p. 131—136 = Mathem.-naturwiss. Mitteil., herausgeg. v. Böklen 2, Stuttgart 1885, p. 54—58. S. 385.
240. Biddle. (Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen über den Rösselsprung.) Educational Times Reprints 41, 1884, p. 70—72.
241. Frolow, M. „Le problème d'Euler et les carrés magiques.“ Nouvelle étude, suivie de Notes par M. M. Delannoy et Ed. Lucas. Paris 1884. — „Les carrés magiques.“ Neudruck ohne Jahresangabe. S. 183, 182, 197, 217, 402.
242. Héraud. „Jeux et récréations scientifiques.“ 1884.
243. Palamède (V^{te} du Ligondès). „Polygraphie du cavalier appliquée à la recherche des carrés magiques.“ Orléans 1884.
244. Tait. „Listing's Topologie.“ Philos. Magaz. (5) 17, 1884, I, p. 30—46. S. 12, 302, 347.
245. Baltzer. „Eine Erinnerung an Moebius und seinen Freund Weiske.“ Leipziger Ber. Math.-phys. Kl. 37, 1885, p. 1—6. S. 341, 342, 343.
246. Gilbert. „The problem of the Knight's tour.“ Philos. society of Washington 7, 1885, p. 88 in Smithsonian miscellaneous collections 33, Washington 1888.
247. Schoute. „Sur les carrés magiques à enceintes.“ Assoc. franç. 14, Congrès de Grenoble 1885, I, p. 93; II, p. 152—155.
248. Wihnyk. „Zum Problem des Rösselsprungs.“ Deutsche Schachzeitung 40, 1885, p. 98—101; 289—294. S. 196.
249. Coccoz. „Carrés magiques impairs à enceintes successives.“ Assoc. franç. 15, Congrès de Nancy 1886, II, p. 130—134.
250. Delannoy. „Emploi de l'échiquier pour la solution de problèmes arithmétiques.“ Assoc. franç. 15, Congrès de Nancy 1886, II, p. 183—188.
251. Frolow, M. „Nouvelles recherches sur les carrés magiques.“ Assoc. franç. 15, Congrès de Nancy 1886, II, p. 170—183.
252. Hofmann, Fritz. „Sur la marche du cavalier.“ Nouv. annal. de mathém. 5, 1886, p. 224—226. S. 174.
253. Kürten. „Theorie der magischen Zahlen-Quadrate und Kreise.“ Köln 1886. S. 210.
254. MacMahon. „Certain special partitions of numbers.“ Quart. J. 21, 1886, p. 367—373. S. 45.
255. Schurig, R. „Die Paarung der Teilnehmer eines Turniers.“ Deutsche Schachzeitung 41, 1886, p. 134. S. 265.
256. Tarry, G. „Géométrie de situation: nombre de manières distinctes de parcourir en une seule course toutes les allées d'un labyrinthe rentrant, en ne passant qu'une seule fois par chacune des allées.“ Assoc. franç. 15, Congrès de Nancy 1886, I, p. 81; II, p. 49—53. S. 374, 380.
257. Hügel. „Kurze Geschichte des Deutschen Kalenders nebst Hinweisung auf die Anfertigung eines 'immerwährenden Kalenders'.“ Darmstadt 1887.
258. Lucas, Ed. „Les carrés magiques de Fermat.“ Journal de mathém. élém. 1887.

259. Lucas, Ed. „Amusements par les jetons.“ *La Nature* 15, 1887, 2ième semestre, p. 10/11. S. 17.
260. Robin. „Carrelage illimité en polygones réguliers.“ *La Nature* 15, 1887, 2ième semestre, p. 95/96. S. 71.
261. Chambeyron. „Théorie des carrés magiques.“ Paris 1888.
262. Jordan, C. „Sur la marche du cavalier.“ *Palermo Rendiconti* 2, 1888, p. 59—68. — Bestimmung der Minimalzahl von Springerzügen zwischen zwei gegebenen Feldern unter Voraussetzung eines unbegrenzten Brettes.
263. Macfarlane, A. „Problem in relationship.“ *Roy. Soc. Edinb. Proc.* 15, 1888, p. 116—117. S. 78.
264. Berg, F. J. van den. „Over even toevervierkanten.“ *Nieuw Archief voor wiskunde* 16, 1889, p. 1—31.
265. Cunningham. „Chess Problem.“ *Royal Engineer's Journal* 1889 und *British Assoc. Report*, Leeds 1890, p. 745. S. 82.
266. Delannoy. „Emploi de l'échiquier pour la résolution de divers problèmes de probabilité.“ *Assoc. franç.* 18, Congrès de Paris 1889, II, p. 43—52; 24, Congrès de Bordeaux 1895, II, p. 70—90.
267. Frolov, M. „Egalités à deux degrés.“ *Bull. de la soc. mathém.* 17, 1889, p. 69—83; s. a. C. R. de Paris 107, 1888, p. 831—832. S. 247.
268. Longchamps, G. de. „Sur les égalités à deux degrés.“ *Journal de mathém. élém.* (3) 3, 1889, p. 171—173; 195—198.
269. Lucas, Ed. „Jeux scientifiques pour servir à l'histoire, à l'enseignement et à la pratique du calcul et du dessin.“ 6 Brochuren (1. „Fasioulette.“ 2. „Pipopipette.“ 3. „La Tour d'Hanoi.“ 4. „L'Icosagonal ou le Jeu des vingt forts.“ 5. „L'arithmétique diabolique.“ 6. „Les Pavés florentins du père Sébastien.“) Paris 1889.
270. Pein. „Aufstellung von n Königinnen auf einem Schachbrette von n^2 Feldern etc. (von $n = 4$ bis $n = 10$).“ *Progr. der Realschule zu Bochum* 1889. S. 123, 124, 126.
271. Vigarié, E. „Calendrier lunaire perpétuel.“ *Assoc. franç.* 18, Congrès de Paris 1889, II, p. 141—144.
272. Cayley. „On latin squares.“ *Messenger of mathem.* 19, 1890, p. 135—137 = *Collect. Papers* 13, p. 55—57. S. 402.
273. Gutzmer. „Eine geometrische Frage.“ *Naturwiss. Wochenschr.* 5, 1890, p. 399; 6, 1891, p. 143.
274. Heawood. „Map-colour theorem.“ *Quart. J.* 24, 1890, p. 332—338. S. 341, 344, 345.
275. Hoppe, R. „Bemerkung zum Königinnen-Problem.“ *Hoppe's Archiv Math. Phys.* (2) 8, 1890, p. 333—334. S. 129.
276. Parmentier. „Sur les carrés magiques.“ *Assoc. franç.* 19, Congrès de Limoges 1890, II, p. 88—99.
277. Schwidtal, A. „Die Darstellung aller Zahlen durch die Zahl 3.“ *Beil. z. Progr. Gymn. Königshütte* 1890. S. 44/45.
278. Simon, H. „Die acht Königinnen auf dem Schachbrett.“ *Naturwiss. Wochenschr.* 5, 1890, p. 215.
279. Tarry, H. „Le problème des reines.“ *Assoc. franç.* 19, Congrès de Limoges 1890, I, p. 153. S. 125.

1891—1900.

280. Heffter. „Über das Problem der Nachbargebiete.“ *Mathem. Annal.* 38, 1891, p. 477—508. S. 341, 342, 345.
281. Lévy, Lucien. „Sur les pavages à l'aide de polygones réguliers.“ *Bull. de la soc. philomathique* (8) 3, 1891, p. 46—50. S. 71.
282. Lucas, Ed. „Théorie des nombres“ 1, Paris 1891 (mehr nicht erschienen). S. III, 140, 260.
283. Johnson, W. „Octonary numeration.“ *New York Math. Soc.* 1, 1891/92, p. 1—6. S. 25.
284. Ball, W. W. Rouse. „Mathematical Recreations and Problems.“ London 1. und 2. Aufl. 1892, 3. Aufl. 1896. S. IV, 65, 74, 281.
- 284*. Ball, W. W. Rouse. „Récréations et problèmes mathématiques.“ 3^{ème} édition, traduite par Fitz-Patrick. Paris 1898. S. 65, 74, 281.
285. Coccoz. „Construction des carrés magiques avec des nombres consécutifs.“ *Assoc. franç.* 21, Congrès de Pau 1892, p. 136—148; 22, Congrès de Besançon 1893, p. 171—183; 23, Congrès de Caen 1894, p. 163—183; 24, Congrès de Bordeaux 1895, p. 102—110. S. 247.
286. Gutzmer. „Aus der Unterhaltungs-Arithmetik.“ *Naturwiss. Wochenschr.* 7, 1892, p. 251—252.
287. Roberts, Samuel. „On certain General Limitations affecting Hyper-magic Squares.“ *London Math. Soc. Proc.* 24, 10. XI. 1892, p. 37—53.
288. Schlegel. „Die allgemeinen Grundlagen zweier Probleme aus der Unterhaltungs-Arithmetik.“ *Hoppe's Archiv Math. Phys.* (2) 11, 1892, p. 93—100. S. 43, 44.
289. Sundara Row. „Geometrical exercises in paper-folding.“ Madras 1893. Addison & Co.
290. Sylvester. „Note on a nine schoolgirls problem.“ *Messenger of mathem.* 22, 1893, p. 159—160; 192. S. 282, 283.
291. Vinot. „Récréations mathématiques.“ Paris 1893.
292. Ball, W. W. Rouse. „Even magic squares.“ *Messenger of mathem.* 23, 1893/94, p. 65—69. S. 284.
293. Burnside. „On an application of the theory of groups to Kirkman's Problem.“ *Messenger of mathem.* 23, 1893/94, p. 137—143. S. 279.
294. Dixon, A. C. „Note on Kirkman's problem.“ *Messenger of mathem.* 23, 1893/94, p. 88—89.
295. Smyth, B. S. „Harmonic forms.“ *Trans. of the Kansas Acad. of Science* 14, 1893/94, p. 46—83.
296. Demonferrand. „Calendrier perpétuel.“ *Assoc. franç.* 23, Congrès de Caen 1894, II, p. 135—141.
297. Maillet. „Sur une application de la théorie des groupes de substitution à celle des carrés magiques.“ *Mémoires de l'acad. des sc. de Toulouse* (9) 6, 1894, p. 258—280.
298. Maillet. „Sur les carrés latins d'Euler.“ *Assoc. franç.* 23, Congrès de Caen 1894, p. 244—252.

299. Schurig, R. „Die Paarung der Teilnehmer eines Turniers.“ Deutsche Schachzeitung 49, 1894, p. 33—38. S. 265, 267.
300. Dickson, L. E. „Gergonne's pile problem.“ Amer. Math. Soc. Bull. (2) 1, 1895, p. 184—186. S. 52.
301. Fontès. „Sur les carrés à bordure de Stifel.“ Assoc. franç. 24, Congrès de Bordeaux 1895, II, p. 248—256. S. 239.
302. Lucas, Ed. „L'arithmétique amusante.“ Paris 1895. S. III, 12, 15, 19, 171, 182.
303. Mittenzwey. „Mathematische Kurzweil.“ Leipzig 1895.
304. Portier. „Le carré diabolique de 9 et son dérivé, le carré satanique de 9, tirés du carré magique de 3.“ Algier 1895.
305. Schubert, H. „Zwölf Geduldspiele.“ Berlin 1895. (Zuerst erschienen in der Naturwiss. Wochenschr. 1891—1894). S. III, 60, 62, 63, 64, 65, 198, 272, 290, 351.
306. Schubert, H. „Ein zahlentheoretischer Satz.“ Mitteil. d. mathem. Gesellsch. zu Hamburg 3, 1895, p. 223—225. S. 293.
- 306^a. Busche, E. „Beweis des vorstehenden Satzes von Herrn Schubert.“ Ibidem, p. 225—226. S. 294.
- 306^b. Ahrens, W. „Über einen zahlentheoretischen Satz des Herrn Schubert.“ Zeitschr. für Math. und Phys. 40, 1895, p. 245—247. S. 294.
307. Tarry, G. „Propriétés du carré magique de 3.“ Journal de mathém. élém. (4) 4, 1895, p. 55—56.
308. Tarry, G. „Le problème des labyrinthes.“ Nouv. annal. de mathém. (3) 14, 1895, p. 187—190. S. 326.
309. Busche, E. „Über die Schubert'sche Lösung eines Bachet'schen Problems.“ Mathem. Annal. 47, 1896, p. 105—112. S. 290, 291, 299.
310. Gardès. „Du calendrier au point de vue de la recherche ou de la vérification des dates.“ Assoc. franç. 25, Congrès de Tunis 1896, II, p. 115—129.
311. Gelin. „Du meilleur système de numération et de poids et mesures.“ Mathesis (2) 6, 1896, p. 161—164. S. 25.
312. Landau, E. „Über das Achtdamenproblem und seine Verallgemeinerung.“ Naturwiss. Wochenschr. 11, 2. VIII. 1896, p. 367—371. S. 114, 154, 155.
313. Ahrens, W. „Über das Gleichungssystem einer Kirchhoff'schen galvanischen Stromverzweigung.“ Mathem. Annal. 49, 1897, p. 311—324. S. 306.
314. Auric. „Sur la formation des calendriers.“ Assoc. franç. 26, Congrès de St. Etienne 1897, II, p. 169—174. S. 333.
315. Davis. „A geometric picture of the fifteen school girl problem.“ Annals of Mathem. 11, 1897, p. 156—157.
316. Gochmann, Ch. „Darstellung der Züge der Schachfiguren durch complexe Größen.“ 1897. Spaczinski's Bote Nr. 263 (Russisch).
317. McClintock. „On the most perfect forms of magic squares, with methods for their production.“ Amer. J. 19, 1897, p. 99—120. S. 230, 255.

318. Lange, M. „Das Schach vom akademischen Standpunkt.“ Berliner Schachzeitung 2, 1897/98, p. 1—5. S. 83.
319. Russischer Schachfreund. „Einige Worte über Lasker und die Richtung der Jetztzeit in der Schachspielkunst.“ Berliner Schachzeitung 2, 1897/98, p. 99—101. S. 84.
320. Heawood. „On the four-colour map theorem.“ Quart. J. 29, 1898, p. 270—285. S. 341.
321. Mertelsmann. „Das Problem der 15 Pensionatsdamen.“ Zeitschr. für Math. und Phys. 43, 1898, p. 329—334. S. 277.
322. Schubert. „Mathematische Mußestunden.“ Leipzig 1898. 2-te Aufl. 1900. S. III, 277.
323. André, Désiré. „De la comptabilité des assauts complets.“ Bull. de la soc. philomathique (9) 1, 1899, p. 139—153.
324. Fourrey, E. „Récréations arithmétiques.“ Paris 1899: S. 3.
325. Landau, E. „Eine Schachfrage.“ Der Schachfreund, herausgeg. v. d. Berl. Schachgesellschaft 2, 1899, p. 97—99. S. 156.
326. Moore, E. H. „Concerning the General Equations of the Seventh and the Eighth Degrees.“ Mathem. Annal. 51, 1899, p. 417—444. S. 279.
327. Polignac, C. de. „Sur le théorème de Tait.“ Bull. de la soc. mathém. 27, 1899, p. 142—145. S. 350.
328. Ahrens, W. „Über die Paarung der Turnierteilnehmer.“ Deutsche Schachzeitung 55, 1900, p. 98—99; 130—132; 227—228. S. 262, 265, 268.
329. Fitting, F. „Über eine Verallgemeinerung der Rösselsprungaufgabe.“ Zeitschr. für Math. und Phys. 45, 1900, p. 137—160.
330. Tarry, G. „Les permutations carrées.“ Mémoires de la Société Roy. des sc. de Liège (3) 2, 1900 = Mathesis (2) 10, Juli 1900, Suppl. p. 23—30. S. 253.

Sachregister.

- Achtdamenproblem s. Achtköniginnenproblem.
Achtköniginnenproblem 114 ff., 162 f.
— in 3 Dimens. 127, Anm.
— unbedingte Exist. von Lös. für $n > 3$ 125 f.
— Anzahl der Lös. 122 ff., 138 f., 149 f. (Tab.).
Ahnen eines Menschen 27 f.
Amben 276.
Analysis situs VI, 302 ff., 318.
Anordnungsprobleme 257 ff.
Anzug beim Schachspiel, das in dems. liegende Übergewicht 81.
— Verteilung dess. bei Turnieren 262 ff.
Aufsenwinkel, Summe ders. im Polygon 66 f.
Automat, Schach- 166.
Bäume (baumförmige Liniensysteme) 304 ff.
Baguenaudier, Etymologie u. Orthographie 33.
— Theorie 32 ff.
Baguenaudier s. Baguenaudier.
Bild, Erraten eines — 29 f.
Boss-Puzzle 351 ff.
Brettablauf für die versch. Schachfiguren 203 ff., 364.
Brettspiele, die ältesten — 80.
— Math. Theorien ders. 81 ff.
Brücke eines Liniensystems 304 (Def.) f., 313, 347.
Brückenproblem, Euler'sches 317 ff.
Caméléon-Spiel 357.
Chemie, Anwendungen topolog. Betracht. auf — 311 ff.
Chinesen, Zahlensystem ders. 24 f.
Christen, Problem der 15 — und der 15 Türken 286 ff.
Cyklomatische Ordnungszahl 306.
Dame 115, s. a. Königin.
Decimalsystem 23, 25.
Determinanten 132 f., 233, 247, 356.
Diabolische Quadrate 230, 256.
Diagonalen s. gebrochene.
Diagramme d. regulären Polyeder 328, 338 f., 348 f.
Diophantische Gleichungen 71, 310.
Dodekaeder, Diagramm 328, 348.
Dodekaederspiel 314, 327 ff., 348 f.
Dominospiel 261, 314, 367 ff.
Doppelt-symm. Lös. des Achtköniginnenproblems, Def. 122.
— — Bestimmung ders. 135 ff.
— des Fünfköniginnenprobl. 158 ff.
Duodecimalsystem 25.
Dutzend 26.
Dyadisches Zahlensystem 27 ff., 37 ff.
Ehepaare, Problem der drei — 3 ff.
Einfach-symm. Lös. des Achtköniginnenprobl., Def. 122.
— — Existenz ders. 135.
Einsiedlerspiel 94 ff.
Einteilung des Schachbretts in 2 gleiche Hälften 200 ff. (s. weiter *zweiteilige* Rösselspr.).
— — durch konzentrische Ränder 133, 153, 155, 179 ff., 239 ff. (s. a. 135 ff. und 206 ff.).
— — in Quadranten 185 ff., 188 ff., 236 ff.
— — in ein Quadrat u. rechtwinklige Ansatzstücke 117, 160, 192 ff.

- Elle 22.
 Endpunkte eines Liniensystems 303
 (Def.) ff., 323 ff.
 Eröffnungszüge b. Schach, Anzahl
 ders. 82.
 Erraten eines Bildes 29 f.
 — von Karten 49 ff., 73 f., 74 ff.
 — einer Zahl 29.
 Euler'sche Quadrate 253, 256, 401 f.
 Euler'scher Satz 307 ff.
 Falten v. Papier 394 ff.
 Farben, Die 2 — der Schachbrett-
 felder s. Zweifarbigkeit.
 Farben-Karten-Problem 340 ff.
 Farbenwechsel bei Schachturnieren
 267 ff.
 — bei Springerzug 140 ff., 166.
 Figuren, Wert der Schach- 84.
 Finger, Benutzung als Rechenmasch.
 22 f.
 Formeln für Gangart der Schach-
 figuren 82, 177.
 Fünfköniginnenproblem 157 ff.
 Fünfzehnerspiel 351 ff.
 Fuhs 22.
 — = 12 Zoll 26.
 Gangart der Schachfig. s. König,
 Königin etc.
 — — Formeln für dies. s. Formeln.
 Gauß'sche Quadrate 253 ff.
 Gebrochene Diagonalen 219 (Def.) f.,
 228, 233, 254 ff.
 Geographie s. Physische G. u. Far-
 ben-Karten-Problem.
 Geschlossene Dominoketten 369 ff.
 — Kreise 313 f.
 — Rösselsprünge 166 (Def.).
 Geschlossenes Liniensystem 303
 (Def.).
 Gewichtsproblem Bachet's 40 ff.
 Grofs 26.
 Gruppe, Einfache 168-gliedrige
 278 f.
 — Ikosaeder- 330.
 — lineare 71.
 — Oktaeder- 120.
 — Untergr. der vorigen 120, 122.
 Halb-magische Quadrate 196, 224,
 256.
 Hanoi, Turm von — 31 f.
 Haufenproblem v. Gergonne 49 ff.
 Herren, Problem der 3 — u. der
 3 Sklaven 9 ff.
 Hexaeder, Diagramm 338.
 Hypermagische Quadrate 247.
 Ikosaeder, Diagramm 349.
 Ikosaedergruppe 330.
 Ikosaederspiel 327, 337.
 Imaginäre Zahlen, Darstellung ders.
 120 f., 174.
 Invariante eines Liniensystems 305.
 Inversionen 356 ff.
 Jahrhundertanfang 389 ff.
 Josephsspiel 286 ff.
 Kabbalistische Quadrate 256.
 Kalender, immerwährender 382 ff.
 Karten, Erraten von gedachten —
 49 ff., 73 f., 74 ff.
 Kenogramme 312.
 Kirkman's Problem 274, s. a. ibid.
 Anm. 4.
 Klaffer 22.
 Kneiphof, Inselstadtteil v. Königs-
 berg 317.
 König, Bretttaulauf 205.
 — Gangart 152 (Def.).
 — Minimalproblem des — 164.
 — Zugzahl 152, 156.
 Königin, Bretttaulauf 205.
 — Gangart 115 (Def.).
 — — in 3 Dimens. 127 f.
 — — Komposition ders. 130, 140,
 154.
 — Zugzahl 154, 155 f.
 — s. a. Achtköniginnenproblem u.
 Fünfköniginnenproblem.
 Komplex, linearer 303.
 Kreise, Anordnungen im — 257 ff.
 — geschlossene 313 f.
 Kreuzungspunkte eines Linien-
 systems 303 (Def.) ff., 319, 322 ff.
 Kuben, magische 246 f.
 Kubische Rösselsprünge s. Rössel-
 sprünge.
 Labyrinth 321 ff.
 Läufer, Bretttaulauf 205 ff.
 — Gangart 115 (Def.), 131 (analyt.
 Formulierung).
 — — in 3 Dimens. 128.
 — Maximalzahl ohne Angriff 140,
 149 ff.

- Läufer, Minimalprobl. 163.
 — Probl. der 8 — 131 ff.
 — Anzahl d. Lös. d. vorig. Probl. 143 ff., 150 (Tab.).
 — Zugzahl 153, 155.
 Lateinische Quadrate 253, 256, 402.
 Latruncolorum ludus 81.
 Liniensystem 302 (Def.).
 — geschlossenes 303 (Def.).
 Ludus Joseph 288.
 — latruncolorum 81.
- Magische Quadrate 196, 209 ff., 251, 255 f., 401 f.
 — Rechtecke u. sonstige Figuren (außer Quadr.) 246 f.
 — Rösselsprünge s. Rösselsprünge.
 Mathematisches Mischen 74.
 Maximalproblem für die einzelnen Schachfig. s. diese.
 Melencolia 209 f.
 Minimalproblem für die einzelnen Schachfig. s. diese.
 Mischen der Karten nach Monge 74 ff.
 — mathematisches 74.
 Mühlespiel 80, 85 ff.
 Mutus dedit nomen cocis 73 f.
- Nachbargebiete 341 ff.
 Nachbarpunkte 342 ff.
 Nasik squares 247, 256.
 Neffe und Onkel 78 f.
 Nonnenspiel 94 ff.
 Notation für die Felder eines Spielbretts (Schach etc.) 85, 89 ff., 94 f., 98 Anm., 116 ff., 120, 130, 131, 142, 158 ff., 167, 173, 176, 181, 189, 223, 225 ff., 236.
 Null, Erfindung ders. 26.
 Numerationssysteme 22 ff., 401.
 Numismatisches 321, 389.
- Oberreihen 291 ff.
 Octavalsystem 25, s. a. 401.
 Offiziere, Problem der 36 — 248 ff., 401 f.
 Oktaeder, Diagramm 339.
 Oktaedergruppe 120.
 Onkel und Neffe 78 f.
 Osterdatum 387 ff., 392.
- Paarung der Teiln. v. Schachtur-
 nieren 262 ff.
- Pandiagonale Gauß'sche Quadrate 254 ff.
 Pandiagonale magische Quadrate 230, 233 f., 255 f.
 Parquetierungen 66 ff., 402.
 Patente, Deutsche Reichs- 94, 289, 321, 366.
 Pensionatspromenaden 260 ff.
 Perfekte Zerlegungen einer Zahl 45 ff.
 Physische Geographie, topolog. Betracht. darüber 308.
 Polyeder, Morphologie der — 306 ff.
 — reguläre 310 f., 320, 337 ff., 348 f.
 — — Diagramme s. dies.
 Polygone, reguläre 66 ff., 402.
 Promenaden zu je 2 260 ff.
 — zu je n 272 ff.
 Puzzle s. Boss-Puzzle.
- Quadrate, diabolische 230, 256.
 — Euler'sche 253, 256, 401 f.
 — Gauß'sche 253 ff.
 — pandiagonale Gauß'sche 254 ff.
 — halb-magische (semi-magische) 196, 224, 256.
 — hypermagische 247.
 — kabbalistische 256.
 — lateinische 253, 256, 402.
 — magische 196, 209 ff., 251, 255 f., 401 f.
 — pandiagonale magische 230, 233 f., 255 f.
 — symmetrische magische 230.
 Quaternionen 327.
- Räumliches Schach 127 f., 198 f.
 Ringfläche 343 ff.
 Ringspiel, magisches 33.
 Rösseln, sich 166 (Def.).
 Rösselsprung II, 141 f., 165 ff., 401.
 — Ursprung dess. 168.
 — Experim. Behandl. des Probl. 203.
 Rösselsprünge, geschlossene (Def.) 166.
 — offene (Def.) 167.
 — kubische 198 f.
 — magische 196 f., 224.
 — spiralförmige 192.
 — symmetrische 196 f.
 — unmögliche 172, 175.
 — zweiteilige 168, 192, 197.
 — Anzahl zweiteiliger 201 f.

- Schachbrett s. Einteilung, Zweifarbigekeit, Notation.
 Schachspiel, Math. Theorie dess. 81 ff.
 Schachturniere s. Turniere.
 Schaf und Wolf 89 ff.
 Schaltjahre 381 ff.
 Schleifen 375 ff.
 Schulmädchen-Problem 274 ff.
 Septante 23.
 Shilling = 12 Pence 26.
 Situs s. Analysis situs.
 Sklaven, Problem der 3 Herren und der 3 — 9 ff.
 Soldaten, Übergang ders. üb. einen Fluß 2.
 Solitärspiel 94 ff.
 — n -ter Ordnung 106 Anm.
 Sovereign-Shilling-Problem Tait's. 12 f., 16 ff.
 Springer, Gangart 151 f., 166.
 — — in 3 Dimens. 198.
 — Gleichung 82, 177.
 — Farbenwechsel 140 ff., 166.
 — Maximalzahl ohne Angriff 140 ff.
 — Minimalproblem 163 f.
 — Zugzahl 151 f., 156.
 Springermethode des Moschopulos 224 ff.
 Stammlösung von mehr. zusammengeh. Lös. des Königinnenpr., Def. 122.
 — von mehr. zusammengeh. Lös. d. Königinnenpr., Angabe ders. für $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ 122 ff.
 — von mehr. zusammengeh. Lös. d. Königinnenpr., Angabe ders. für $n = 12, 13, 16, 17$ 138 f.
 — von zusammengeh. Lös. d. Fünfköniginnenpr. 158 ff.
 Subperfekte Zerleg. e. Zahl 45, 47 ff.
 Substitutionen 71, 77.
 Symmetrische Lösungen s. einfach-symmetrisch und doppelt-symmetrisch.
 Teilung von Flüssigkeiten 53 ff.
 Telegraphie der Römer 26.
 Ternen 276 f., 282, 284.
 Terrassenmethode Bachel's 221 ff.
 Tetraeder, Diagramm 338.
 Treas 305, 311.
 Tripelsysteme 276 ff.
 Tripelzüge (Solitärspiel) 108 ff.
 Türken, Problem der 15 Chr. u. d. 15 — 286 ff.
 Turm von Hanoï 31 f.
 Turm (Schachspiel) Bretttaulauf 203 ff., 364.
 — Gangart 115 (Def.).
 — Gangart in 3 Dimens. 127.
 — Minimalprobl. 163.
 — Probl. der 8 Türme 129, 130.
 — Anzahl der Lös. des vor. Probl. 140, 149 f. (Tab.).
 — Zugzahl 153, 155.
 Turniere, Schach- 127, 262 ff.
 Überfahrten, erschwerte 1 ff.
 Umföllungsaufgaben 53 ff.
 Unsymm. Lös. des Königinnenprobl., Def. 121.
 Verwandtschafts calcul 78.
 Vicesimalsystem 23.
 Weizenkörner auf dem Schachbrett 28, 37.
 Winkel regul. Polygone (Tab.) 70.
 — Aufsen- eines Polyg. 66 f.
 Wolf, Ziege, Kohlkopf 1 f.
 Würfel s. Hexaeder.
 Zählen um die Wette 72 f.
 Zahl, Erraten einer gedachten — 29.
 Zahlensysteme 22 ff., 401.
 — nicht-decimale 24 f.
 Zerlegungen einer Zahl, perfekte u. subperfekte (s. dies) 45 ff.
 Zugzahlen aller Schachfig. zus. 156.
 Zweifarbigekeit des Schachbretts 85, 89 ff., 112, 129, 140 ff., 143 ff., 166, 174, 190 f., 205 ff., 358 f.

Namenregister.

Hinter jedem Namen sind zunächst die Seitenzahlen des Textes angegeben und sodann in **fetten** Ziffern diejenigen Nummern des litterarischen Index, deren Verfasser (Herausgeber) der betreffende ist. Es sind jedoch nur die auch im Text erwähnten Autoren des litterarischen Index hier aufgeführt.

- Abicht 389.
Abraham Ibn Esra s. Ibn.
Africanus, Sextus Julius 26.
Ahrens, W. 255, 262, 265, 268, 277, 294, 306. **306^b, 313, 328.**
Akar, Adrien 290.
Alcuin 1, 3.
Ambrosius von Mailand 287.
Anderssen, A. 84, 127.
Anstice 276, 281, 284. **129.**
Argand 174.
Aristoteles 24, 80.
Auric 383. **314.**
- Bachet de Méziriac III, 3, 40, 43, 44, 49, 52, 53, 55, 60, 72, 73, 74, 221, 222, 249, 286, 287, 288. **15.**
Badoureaux, A. 70. **214.**
Ball, W. W. Rouse IV, 65, 74, 234, 281. **284, 284^a, 292.**
Baltzer, R. 307, 341, 343, 356. **245.**
Bellavitis 123.
Berg, F. J. van den 15. **264.**
Berger, J. 265.
Bernouilli, Jacob 24.
Bertini 306.
Bessy s. Frenicle.
Beverley, W. 196.
Bézout 356.
Biddle 78, 174, 182. **240.**
Bilguer, v. 157.
Bills 276.
Bismarck 157.
Bolyai, Wolfgang 392.
Boole 78.
- Booth 307.
Bopp 24.
Botton 125.
Bouniakowsky, Victor 76. **139.**
Bourget, J. 76, 77. **224.**
Broch, J. 33.
Brückner, M. 308.
Brunel 276.
Bürja s. Burga.
Buniakowsky s. Bouniakowsky.
Burga, Abel 389.
Burnside 277, 279. **293.**
Busche, E. 290, 291, 292, 294, 295, 299. **306^a, 309.**
Busschop, J. 96. **198.**
Busschop, P. 96. **198.**
- Caesar, J. 287.
Cantor, M. 13, 24, 25, 26, 222, 288. **181.**
Cardan 32, 33, 288. **5.**
Carette 394.
Carpmael 281. **215.**
Catalan, E. 114, 309.
Cauchy 307.
Cayley 274, 277, 282, 305, 307, 308, 311, 312, 313, 340, 402. **124, 136, 151, 192, 199, 272.**
Cesàro 290, 292.
Chicandard 113.
Chuquet 288.
Ciccolini 188, 198. **99.**
Claus (Pseudonym) 31.
Clausen, Th. 43, 188, 251, 276, 316, 401, 402. **96, 132.**

- Clebsch 306.
 Clifford 306.
 Clintock s. M^cClintock.
 Cluley, W. 82.
 Coccoz 247. **249, 285.**
 Cointe s. Le Cointe.
 Collini 179, 180, 181, 182, 185. **76.**
 Coste 43.
 Crelle, A. L. 308, 310.
 Cunningham 82. **265.**

 Daher s. Sissa ben Daher.
 Deelman 265.
 Delannoy, H. 14, 17, 124, 174, 182,
 290, 300, 305, 311, 369. **241,**
250, 266.
 De Morgan, Augustus 78, 340.
 Descartes 307.
 Dickson, L. E. 52. **300.**
 Dindorf 287.
 Dingeldey 341.
 Dionysius Exiguus 390, 391.
 Drach 246. **171.**
 Dürer, Albrecht 209, 210, 213.
 Durège 306, 307.
 Durrande 43.
 Dyck, W. 120, 279, 330.

 Eberhard 307, 309.
 Ellis, Robert Leslie 78.
 Eneström 401.
 Ericsson (Pseudonym) 164.
 Esra, Araham Ibn — s. Ibn.
 Euler, Leonhard 165, 166, 168, 169,
 170, 172, 173, 174, 175, 177, 179,
 185, 188, 193, 196, 247, 248, 251,
 253, 255, 256, 302, 307, 308, 309,
 310, 316, 318, 401, 402. **58, 66,**
66*, 73, 81, 82.
 Exner 197. **184.**
 Eye, A. von 210.

 Fahrenheit 26.
 Fitz-Patrick, J. 65, 74, 281. **284*.**
 Fleury 357. **205.**
 Flye Sainte-Marie, C. 82, 179, 200,
 202, 373. **185.**
 Förster, W. 392.
 Fontenay 6.
 Fontès 239. **301.**
 Foucher de Careil 307.
 Fourrey 3. **324.**
 Franel 125, 163, 290, 292.
 Franklin, Benj. 209, 246. **71.**

 Franz 197. **115.**
 Frenicle de Bessy 213, 224, 246. **41.**
 Fricke, R. 71, 279.
 Frolow, M. 133, 182, 197, 217, 247,
 402. **241, 251, 267.**
 Frost, A. H. 170, 174, 192, 193, 198,
 199, 210, 230, 231, 247, 281, 284.
158, 159, 164, 193, 194, 195,
196, 231.

 Galenus 80.
 Gauß, C. F. 115, 116, 120, 121, 130,
 131, 137, 174, 253, 254, 255, 256,
 302, 387, 392, 401, 402. **144.**
 Gelin 25. **311.**
 Gergonne 24, 43, 49, 50, 51, 78,
 307, 308, 309, 310. **87.**
 Gerhardt, C. J. 24, 302. **43.**
 Gill 281.
 Glaisher 132. **177.**
 Godt 307.
 Goedeke 393.
 Goethe 80.
 Graf 306.
 Gregor XIII., Papst 382.
 Gros, L. 32, 33. **166.**
 Gröson, J. Ph. 394. **83.**
 Grunert 307.
 Gruyet 327.
 Guarini 167.
 Günther, S. 131, 132, 210, 213, 222,
 224, 401, 402. **178, 182, 186,**
187.
 Guthrie, Francis 340.
 Guthrie, Frederick 340. **197.**
 Guyot 52, 78. **72.**

 Halsted 307.
 Hamilton 314, 327, 328, 329, 330,
 331, 332, 336, 337, 343, 349, 350.
134, 137.
 Hammer 157.
 Harmuth 246. **216, 217, 225, 232.**
 Harrison, C. H. 234.
 Hartenstein 302.
 Head, B. V. 321.
 Heawood 341, 344, 345, 346. **274,**
320.
 Heffter, L. 276, 341, 342, 345. **280.**
 Hegesippus (Pseudonym) 287.
 Heine, Heinr. 390.
 Hermary 100, 102, 106, 109, 113,
 330, 365. **200.**
 Herschel, John 389.

- Hesse, Otto 276.
 Hessel 307.
 Heydebrand, v. — u. d. Lasa 81,
 168, 171, 179, 197. **113, 117.**
 Hierholzer, C. 316. **172.**
 Hippokrates 80.
 Hire s. Lahire.
 Hofmann, Fritz 174. **252.**
 Hoppe, R. 129. **275.**
 Horner, J. 231, 279. **163.**
 Hoyer, P. 306.
 Hudson 52, 78.
 Hugel, Th. 246. **143, 188.**
 Humboldt, A. v. 24.
 Hurwitz, A. 306.
 Hutt, Ed. 394.
 Huygens 302.

 Ibn, Abraham — Esra 287.

 Jaenisch 81, 82, 157, 171, 173, 175,
 197, 401. **148.**
 Jahn, G. A. 386. **98.**
 Jean Paul s. Richter.
 Jenkins 166, 174.
 Johnson, Woolsey 25, 352. **201, 233.**
 Jolivald 380.
 Josephus 286, 287, 288.
 Julius, Sextus J. Africanus s. Afri-
 canus.

 Kant 302.
 Karl XII. v. Schweden 25, 401.
 Kasten 306.
 Kempe 341, 342, 344. **202.**
 Kempelen, von 166.
 Kieseritzky 127.
 Kirkman 78, 274, 275, 276, 277,
 279, 281, 282, 283, 284, 285, 307,
 327, 347. **116, 125, 126, 149.**
 Klein, Felix 71, 120, 279.
 Knobel, H. 289.
 Kochanski 247. **38.**
 Kortholt, Chr. 24. **54.**
 Kronecker, L. 22.
 Kürten 210. **253.**

 Labosne 55, 238. **15.**
 Lahire, de 214. **46.**
 Laisant 260, 362, 373, 380.
 Landau, E. 114, 154, 155, 156, 162,
 163, 401. **312, 325.**
 Lange, Max 28, 81, 83, 157, 164.
 152, 153, 157, 318.

 Langer 307.
 La Noë s. Noë.
 Laplace 356.
 Laquière 130, 188, 190, 191, 192,
 201, 202. **206, 218.**
 Lasa s. Heydebrand.
 Lasker, Emanuel 84.
 Laurent s. Saint-Laurent.
 Lavernède, Thomas de 188. **104.**
 Lea 276.
 Le Cointe 380.
 Legendre 170, 307, 308, 310.
 Leibniz 1, 24, 83, 94, 96, 101, 302.
 43, 48, 54, 55.
 Lempertz, Heimr. 210.
 Leo XIII., Papst 392.
 Leslie Ellis s. Ellis.
 Lévy, Lucien 71. **281.**
 L'huilier 307.
 Lie, Sophus 23.
 Linde, Antonius van der 80, 157,
 165, 166, 168. **179.**
 Lionnet 131.
 Lippich 302, 306.
 Listing 12, 302, 306, 307, 308, 320.
 118, 150.
 Littré 33.
 Loubère, Simon de la 214, 218. **40.**
 Loyd 205. **161.**
 Lucas, Ed. III, IV, VI, 6, 8, 12,
 13, 14, 15, 16, 17, 19, 23, 31, 33,
 53, 86, 89, 98, 109, 112, 113, 123,
 124, 125, 130, 133, 140, 151, 152,
 154, 167, 171, 230, 257, 259, 260,
 261, 272, 283, 284, 285, 305, 323,
 330, 336, 344, 351, 357, 362, 365,
 368, 369, 372, 373, 380. **189,**
207, 227, 233, 241, 258, 259,
269, 282, 302.
 Ludolph 389.
 Lüroth, J. 306.

 M^cClintock 230, 255. **317.**
 Macfarlane, A. 78. **208, 220, 221,**
228, 234, 235, 263.
 MacMahon 45, 305. **254.**
 Mahabharata 24.
 Malmsten 352. **229.**
 Mantel 112, 113, 154. **236.**
 Mantia, Gianutio della 168. **11.**
 Martius, Jok. Nik. 33. **105.**
 Mascheroni, L. 394.
 Maser 170.
 Massip 210.

- Matzka 386. **95.**
 Maxwell, Clerk 308.
 Mease 284, 285.
 Melanchthon, Philipp 66, 239.
 Mertelsmann 277. **321.**
 Meun, Jean de 327.
 Méziriac s. Bachet.
 Minding 175, 178, 179, 199. **181.**
 Möbius 342, 343.
 Mollweide 210. **88.**
 Monge 74, 76, 77. **75.**
 Montmort, de 96.
 Moon, R. 174, 181, 182, 246. **110,**
 111, 114.
 Moore, E. H. 276, 279. **326.**
 Moreau 260, 290, 300.
 Morgan s. De Morgan.
 Morphy, Paul 84.
 Moschopulos, Manuel 222, 224, 230.
 Muhamed ibn Scherph 157.
 Nash 199.
 Nauck 114, 115, 123.
 Netto 276.
 Noë, de La 123, 138.
 Noether 276.
 Noltenius, R. A. 24. **55.**
 Oppen, von 196. **122, 140.**
 Ozanam 32, 289. **42.**
 Paracelsus 210.
 Parmentier 123, 124, 197. **237,**
 276.
 Pascal 327.
 Pauls, E. 125, 135, 154, 157. **180.**
 Pein, A. 123, 124, 126. **270.**
 Perott 143, 144, 148. **238.**
 Perrin 307.
 Pessl, von 246. **173.**
 Peters, C. F. 115. **144.**
 Petersen, J. 341, 350.
 Pierce, B. 277. **145.**
 Piper 387. **109.**
 Plato 22.
 Plinius 321.
 Poincaré, H. 308.
 Poisson 12.
 Polignac, C. de 188, 305, 350. **146,**
 222, 327.
 Poppe, J. H. M. von 33. **105.**
 Power, Joseph 279. **160.**
 Protagoras 22.
 Pyrdard 25.
 Rädell 81. **119.**
 Redon 113.
 Régnier, A. 176. **175.**
 Reifs, Michel R. 96, 98, 100, 102, 104,
 107, 108, 276, 380. **138, 188*, 165.**
 Retberg, R. v. 209.
 Richter, Joh. Paul Friedr. 114, 166.
 Riemann, Bernh. 302, 306.
 Riese, Adam 213, 393. **6.**
 Robin 71. **260.**
 Roget 188, 189, 191. **106.**
 Rouse s. Ball.
 Row s. Sundara Row.
 Ruchonnet 100. **138*.**
 Saint-Laurent, Thomas de 77, 78.
 154.
 Sauveur 214, 246. **49, 49*.**
 Schachram (indischer König) 28.
 Schallopp, E. 265.
 Scheffler, H. 231, 246. **230.**
 Scherph s. Muhamed.
 Schlegel, Victor 43, 44. **288.**
 Schmidt, Franz 392.
 Schollwer, E. V. 263.
 Schopenhauer, Arthur 82.
 Schoute 124, 265. **247.**
 Schroeter, T. 366.
 Schubert, H. III, 60, 62, 63, 64, 65,
 198, 272, 277, 290, 291, 293, 299,
 300, 307, 351, 383. **305, 306,**
 322.
 Schumacher, H. C. 115, 174, 249,
 251, 401, 402. **144.**
 Schurig, R. 265, 267, 272. **255, 299.**
 Schwidtal, A. 44. **277.**
 Sissa ben Daher 28.
 Stäckel, P. 392.
 Stein 25. **94.**
 Steiner, Jakob 275, 276, 307.
 Steinitz, W. 84.
 Steinschneider 287.
 Stevin, Simon 25.
 Stifel, Michael 66, 239, 240, 242,
 243, 246, 247. **4.**
 Story, W. E. 341, 352. **201*, 202*.**
 Sundara Row 394, 399. **289.**
 Sylvester 257, 274, 282, 283, 305,
 351. **141, 183, 290.**
 Tait 12, 13, 17, 302, 343, 347, 349,
 350, 352. **210, 211, 212, 244.**
 Tarry, Gaston 251, 253, 326, 373,
 374, 380. **256, 307, 308, 330.**

- Tarry, Harold 125, 154, 176. **168,**
 279.
 Tartaglia 53. 7, 8.
 Tebay 305.
 Teufel 287.
 Thompson, W. H. 246, 251. **162.**
 Tissandier 351. **213, 223.**
 Trémaux 323.
 Trigaut, Nic. 351.

 Vandermonde 167, 173, 176, 178,
 185, 186, 187, 188, 236, 302.
 74.
 Vespasian 286.
 Volpicelli 175, 176. **127, 169,**
 170, 175*.
 Voltaire 25, 179.
 Vofs, J. H. 80.
 Vries, de 276.

 Walecki 257, 261, 268, 283, 284.
 Wallis 32.
 Warnsdorf, H. C. von 170, 171, 173,
 175, 401. **90, 142.**
 Weber, C. J. 287.
 Weber, H. 22.
 Weierstrafs 275.
 Weiske 342, 343.
 Wekerle 81. **203.**
 Wenzelides 171, 172, 196. **123, 128.**
 Wessel 174.
 Wiener, Chr. 322, 323. **176.**
 Wihnyk 196. **248.**
 Wolf, R. 203.
 Woltmann 210.
 Woolhouse 274, 281. **147.**

 Zeller, Chr. 285. **239.**
 Zulauf 276.

CABOT SCIENCE LIBRARY

~~CANCELLED~~
CABOT

~~JUN 15 2001~~
JUN 20 2001

~~BOOK DUE~~

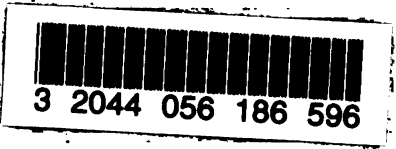
~~CANCELLED~~

CABOT

SEP 30 2001

JUL 23 2001

BOOK DUE



ACT 1913

JAN 27 1938

OCT 28 1909

MAY 1903

OCT 20 1911

JUN 21 1911

FEB 20 1913



3 2044 056 186 596

